

# 現代物理学概論講義ノート

松田 理

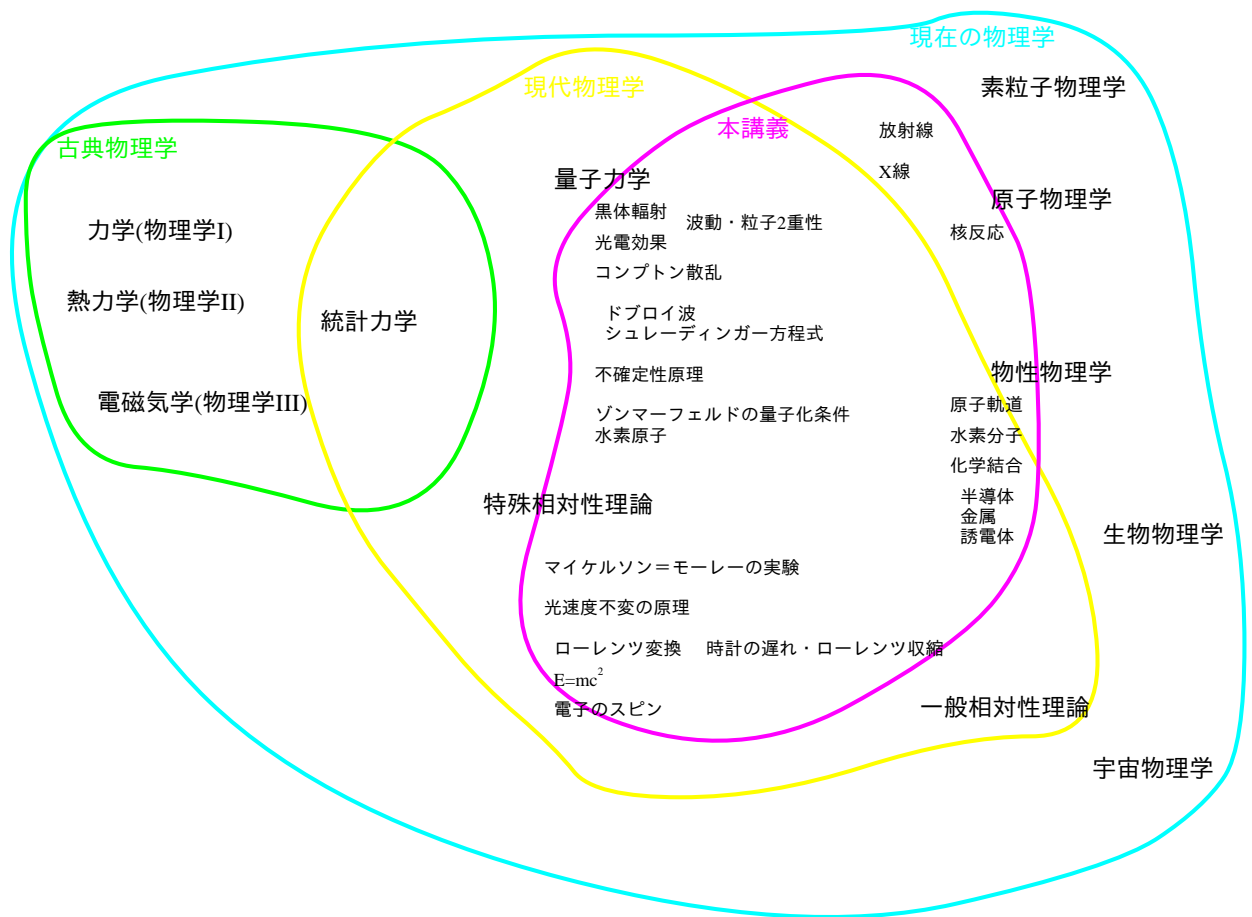
2020年4月12日

## 目次

<b>1</b>	<b>前期量子論</b>	<b>5</b>
1.1	光の粒子性	5
1.1.1	黒体輻射	5
1.1.2	光電効果	8
1.1.3	コンプトン散乱	9
1.2	電子の波動性	10
1.2.1	電子	10
1.2.2	原子核	11
1.2.3	原子スペクトル	12
1.2.4	ボーアの水素原子モデル	13
1.2.5	ドブロイ波	15
1.2.6	ボーアの水素原子モデルと波動としての電子	16
1.3	量子力学への道	17
1.3.1	Schrödinger の波動方程式	17
1.3.2	1次元ポテンシャル中の粒子	18
1.3.3	水素原子	19
<b>2</b>	<b>特殊相対性理論</b>	<b>21</b>
2.1	ガリレイの相対性	21
2.2	マイケルソン・モーレーの実験	22
2.3	ローレンツ収縮と局所時間	24
2.4	アインシュタインの相対性原理	24
2.5	ミンコフスキー空間	29
2.6	速度の合成	33
2.7	電磁場のローレンツ変換	34
2.8	ドップラー効果	35
2.9	質量とエネルギー	36

<b>3</b>	<b>物性物理学への道</b>	<b>43</b>
3.1	水素分子	43
3.2	固体	44
3.2.1	分子結晶	44
3.2.2	共有結合結晶	44
3.2.3	イオン結晶	45
3.2.4	金属結晶	45
3.3	エネルギーバンド	45
3.4	物質の存在様態 —金属、半導体、絶縁体—	46
3.5	ドーピングと p 型・n 型半導体	47
3.6	接触電位差	47
3.7	半導体デバイスの動作原理	48
3.7.1	pn 接合	48
3.7.2	接合型トランジスタ	49
3.7.3	電解効果トランジスタ	49

# 講義の概要



## 講義情報

必要な情報はELMSのグループに掲載する他、最小限の情報は  
<http://kino-ap.eng.hokudai.ac.jp/matsuda> 以下にも掲載する。

## 参考書

講義に関するもの

- 「現代物理学」 長岡洋介、東京教学社 (1995).
- 「現代物理学」 小出昭一郎、東京大学出版会 (1989).
- 「21世紀、物理はどう変わるか」 日本物理学会編、裳華房 (2002).
- ブルーバックス203「相対性理論はむずかしくない」 中野董夫、菅野禮司、講談社 (1972).
- 「X線からクォークまで」 セグレ (久保亮吾、矢崎裕二訳)、みすず書房 (1982).

より深く学ぶために

- 「キッテル統計物理」 C. Kittel (斎藤信彦、広岡一 共訳)、サイエンス社 (1977).
- 「電磁気学」 砂川重信、岩波全書 (1977)。
- 「理論電磁気学」 砂川重信、紀伊國屋書店 (1973)。
- 「量子力学の考え方」 物理の考え方4 砂川重信、岩波書店 (1993)。
- 「相対性理論の考え方」 物理の考え方5 砂川重信、岩波書店 (1993)。
- 「相対性理論」 物理入門コース9 中野董夫、岩波書店
- 「半導体デバイス」 -動作原理と応用- 富澤一隆・山口憲、丸善 (2003)。
- 「半導体デバイスの基礎」 松本智、陪風館 (2003)。
- 「セミコンダクターの物理学」 ジーガー、吉岡書店 (1991)。

# 1 前期量子論

## 1.1 光の粒子性

光の干渉現象は古くより知られる。1801年には、ヤング (Thomas Young, 1773–1829) が2本の近接したスリットを通過する光がスクリーン上に干渉縞を形成する実験を行い、光の波動性を示した。しかし、やがて単なる波動現象として説明できない光の性質が明らかになってきた。本節ではこのあたりの経緯をいくつかの事例に沿って見ていこう。

### 1.1.1 黒体輻射

熱せられた高温の物体が光を発する現象は、電球をはじめとして周知のことであろう。実験によると、このとき発せられる光のスペクトル (光強度の波長依存性) は主として物体の温度のみに依存し、物体の種類等にはあまり依らない。温度が低いときは、発せられる光は赤っぽく、温度が高くなるにつれて白色に近づいていく。(実験結果については例えば長岡洋介「現代物理学」p.18 図 1.20 参照)

19世紀末までに飛躍的に進展した電磁気学、熱力学、統計力学などのいわゆる古典物理学によってこのスペクトル形状を説明しようとする試みは、うまくいかなかった。この説明のためにプランク (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947) は1900年に「量子仮説」という全く新しい考え方を発表した。これ以降、量子力学が発展していくことになる。以下、物体からの光の輻射の問題について、古典力学がいかに破綻し、量子仮説がいかにその困難を克服したかについて述べる。

高温の物体が光を発する現象は、物質と電磁場が熱平衡状態にあることによって発現する。これは、物質の温度と電磁場の温度とが等しいという意味であるが、そもそも電磁場の温度とは何のことだろうか？

熱平衡状態およびその温度は熱力学・統計力学によって規定される。ある系が熱平衡にあるということは、その系がまわりの系とエネルギーをやりとりして、定常的な状態になっているという意味である。例えば、熱いコーヒーに冷たい匙をつけると、コーヒーと匙との分子あるいは原子の振動 (熱振動) がエネルギーをやりとりして、熱平衡状態になる。ふたつあるいはそれ以上の系が熱平衡状態にあるとき、それらの温度が等しいと言う。

電磁場の温度もこれと同様にして理解できる。この場合は電磁場の振動 (電磁波) と物質の構成原子の熱振動がエネルギーをやりとりして熱平衡状態になっているのである。

電磁場の熱平衡状態を明確に考察するために、電磁波を完全に反射する壁で囲まれた空洞を考える。空洞部分には電磁波が存在できる。系全体が熱平衡状態にあるときは、空洞部分の電磁波の温度と壁の温度とが等しい。ここで壁に小さな穴を開けると熱平衡状態にある電磁波がそこから洩れ出てくる。このような電磁波 (光) を空洞放射または黒体輻射という。黒体という意味は、小さな穴はそこに入射する光を反射しないので完全な黒体とみなされるからである。

空洞にはどのような電磁波が存在できるのだろうか？ 電磁気学の結果によると、電磁波はこのような空洞中で定在波として存在する。電磁波の電場強度は壁のところで0になっていなければならない。一辺の長さが  $L$  の立方体形状の空洞を考えよう。それぞれの辺は  $xyz$  軸に平行

にとり、空洞は  $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L$  の領域を占めているものとする、定在波による電場の強さ  $E$  は

$$E \propto \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cos \omega t, \quad (1.1)$$

のように表される。 $\omega$  は電磁波の振動の角振動数である。 $k_x, k_y, k_z$  は波数と呼ばれる量で、 $x, y, z = 0$  および  $L$  において  $E$  が 0 になるという条件から、

$$k_x L = n_x \pi, \quad k_y L = n_y \pi, \quad k_z L = n_z \pi \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

のようにとびとびの値をとる。式 (1.1) は実は電磁気学の Maxwell 方程式から導かれる以下の波動方程式

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

の解でなければならない。実際に (1.1) を (1.2) に代入すると

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (1.3)$$

のように、与えられた  $k_x, k_y, k_z$  に対応する角振動数  $\omega$  が示される。

あるひとつの  $n_x, n_y, n_z$  の組合わせで表される振動をモードという。すぐに確かめられるように (1.1) を任意定数倍したものは (1.2) の解になっている。すなわち、ひとつのモードは任意の振幅を取りうる。(古典的な) 統計力学の結果によれば、系が温度  $T$  の熱平衡状態にあるとき、ひとつの振動モードには  $k_B T$  の程度のエネルギーが割り当てられる(エネルギー等分配則)。ここで  $k_B$  はボルツマン定数と呼ばれる定数で  $1.38 \times 10^{-23}$  J/K 程度の値を持つ。

異なる  $n_x, n_y, n_z$  (従って異なる  $\omega$ ) の (1.1) を加え合わせたものもやはり (1.2) の解になっている。(このような性質を線形性という。) 従って空洞は任意の  $n_x, n_y, n_z$  で指定される無数のモードを持つ。そして熱平衡状態においてそれぞれのモードに  $k_B T$  のエネルギーが与えられている。

黒体放射のスペクトルを観測することは、空洞内の各モードを振動数毎に分類し、それぞれの振動数における割り当てエネルギーの総量を観測することに対応する。我々はすでにこれまでの議論で各モードが  $k_B T$  のエネルギーを持つことを知っている。これに加えて必要なのは、与えられた振動数を持つモードの個数である。これは以下のような考察によって得られる。

$k_x, k_y, k_z$  を  $x, y, z$  軸とする空間を考える。これを波数空間という。空洞内で許される波数は、波数空間において  $\pi/L$  の周期で 3 次元的に等間隔に並んだ点で表される。光には 2 つの偏光方向の自由度があるので、それぞれの点には 2 つのモードが対応する。すなわち波数空間の体積要素  $\Delta = \pi^3/L^3$  あたり 2 つのモードが存在する。一方 (1.3) により、振動数  $\omega$  をあたえる波数ベクトルの点の集合は、波数空間における半径  $\omega/c$  の球面をなす。 $\omega$  以下の振動数を持つモードの数はこの球の体積を  $\Delta$  で割って偏光の自由度 2 をかけたものとなる。振動数  $\omega$  から  $\omega + d\omega$  の範囲のモードの数を  $D(\omega)d\omega$  と書くことにしよう。 $D(\omega)$  は状態密度と呼ばれる。上の関係は

$$\int_0^\omega D(\omega') d\omega' = \frac{2 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 / 8}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} \quad (1.4)$$

と表される。(8 で割るのは  $k_x, k_y, k_z > 0$  の部分は球の 1/8 に相当するためである。) 両辺を  $\omega$  で微分することにより

$$D(\omega) = \frac{L^3 \omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (1.5)$$

が得られる。状態密度を用いると振動数  $\omega \sim \omega + d\omega$  の範囲の光の強度 (エネルギー) は

$$D(\omega)k_B T d\omega$$

に比例する。パワースペクトル  $I(\omega)$  は、 $\omega \sim \omega + d\omega$  の範囲の曲線  $I(\omega)$  以下の面積がその波長範囲の光強度に比例するように描かれる。従って上の場合  $I(\omega) \propto D(\omega)k_B T$  となる。

この結果は、黒体輻射のスペクトル形状が  $\omega^2$  に比例している。これは実験の低エネルギー側の振る舞いとよく一致している。しかしながら、実験で見られるようなピークの存在およびその温度依存性を説明することができない。更に悪いことには、スペクトル強度は  $\omega$  の増加とともに際限無く強くなり、これをエネルギーで積分した強度すなわち全放射強度は発散してしまう。

この放射強度の発散問題をさらに深く考察するために、エネルギー等分配則を振り返ってみよう。統計力学によると、あるひとつの自由度 (今の場合モード) が様々なエネルギー  $\epsilon$  を取りうる場合、それらの状態のうち  $\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon$  のエネルギーを持つひとつの状態が実現される確率は

$$A \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) d\epsilon$$

で与えられる。ただし  $A$  は規格化の定数で

$$\int_0^\infty A \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) d\epsilon = 1$$

によって  $A = 1/k_B T$  と与えられる。この確率を用いてエネルギーの期待値を計算すると

$$\bar{\epsilon} = \int_0^\infty A \epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) d\epsilon = k_B T$$

が得られる。これがエネルギー等分配則の正体である。以下これを古典的なエネルギー等分配則と呼ぶことにしよう。

プランクはこの古典的なエネルギー等分配則が誤っているのではないかと考えた。そして、振動数  $\omega$  を持つひとつの振動モードのエネルギーが連続的な値をとらず、 $\hbar\omega$  の整数倍の離散的なエネルギーしか取り得ないという仮説 (量子仮説) をとらえた。量子仮説によって、エネルギーの期待値がどのように異なってくるのかについて調べよう。振動数  $\omega$  を持つモードはエネルギーとして  $n\hbar\omega$  を取る。ただし  $n = 0, 1, 2, \dots$  である。 $n$  の値として 0、すなわち全く振動していない状態も含まれていることに注目されたい。統計物理学の要請により、これらの状態が実現される確率  $P_n$  は

$$P_n = A \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}\right),$$

で与えられる。 $A$  は規格化の定数で

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

の条件より  $A = 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$  と求められる。この確率を用いると、このモードが持つ振動エネルギーの期待値は

$$\bar{\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega A \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}\right)$$

で与えられる。

級数和は以下のようにして求められる。関数  $f(x) = 1/(1-x)$  の  $x=0$  の周りのテーラー展開を考えよう。

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

この両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{(n-1)},$$

となる。従って

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n,$$

である。  $x$  に  $\exp(-\hbar\omega/k_B T)$  を代入することにより

$$\bar{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1},$$

が得られる。  $k_B T \gg \hbar\omega$  のときはこの関数は  $k_B T$  に収束する。これは上に述べた古典的なエネルギー等分配則と同じ結果である。一方  $k_B T \ll \hbar\omega$  のときは、この関数は

$$\hbar\omega \exp(-\frac{\hbar\omega}{k_B T})$$

と近似され、特に  $\hbar\omega \rightarrow \infty$  の極限で 0 に収束する。

得られたエネルギー期待値と、状態密度を組み合わせることによりスペクトルを表すと

$$\frac{L^3 \omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1}$$

となる。この関数は  $\hbar\omega$  の小さな領域で  $\omega^2$  に比例し、ある  $\omega$  で極大になった後は指数関数的に減衰する。これは実験結果によく合う。また、スペクトルを  $\omega$  で積分すると有限の値に収束し、古典的な場合の発散の困難は解消されている。

プランクの量子仮説の物理的な意味は次のように考えられる。振動数  $\omega$  の振動モードは  $\hbar\omega$  を単位としてのみエネルギーをやりとりできる。一方温度  $T$  の熱平衡状態では、ひとつの自由度に  $k_B T$  程度のエネルギーを与えうるが、振動数  $\omega$  が高く  $\hbar\omega \gg k_B T$  になると、振動子は実質的に周囲からエネルギーをもらうことができず「凍結」される。このように凍結された振動モードは系に存在しないのと同じことになるのである。

### 1.1.2 光電効果

物質に適当な波長の光を照射すると電子が飛び出す。この現象は光電効果と呼ばれる。ハルヴァックス (Wilhelm Ludwig Franz Hallwachs, 1859–1922) は 1888 年に金属表面でこの現象を発見した。その後の研究により 1900 年頃までに以下のような光電効果の性質が明らかになっていった。



1. 電子が放出されるためにはある波長  $\lambda_0$  より短い波長の光を照射する必要がある。この波長  $\lambda_0$  は金属の種類ごとに決まっている。 $\lambda_0$  より波長の長い光では、いくら強く光を照射しても電子は放出されない。
2. 放出された電子のエネルギーは光の強さには無関係で、照射した光の波長のみ依存する。短い波長ほど電子のエネルギーは大きい。(→ 電子のエネルギーを測るには?)
3. 放出される電子の数は、光の強度に比例する。(→ 電子の数を測るには?)

このような挙動は光を連続的なエネルギーの流れと考えていては、説明がつかないものであった。

アインシュタイン (Albert Einstein, 1879–1955) は 1905 年、黒体放射のエントロピーについての考察に基づいて「光量子」の考え方を提唱した。そしてその応用例として、光電効果の説明を与えたのである。光量子の考え方はプランクの量子仮説から一步踏み込んだもので、光そのものが一定のエネルギーを持つ粒子 (光子) からなると考える。ひとつの光子のエネルギーは  $h\omega$  で与えられ、光子が電子と相互作用する際には、光子一つに対して電子一つが対応する。

光量子の考え方によると上の光電効果の実験事実は以下のように説明される。

1. 物質に光が吸収されると、光子ひとつの持つエネルギー  $h\omega$  が、ひとつの電子に与えられる。物質中の電子は、それが物質中にとどめられるようポテンシャル井戸の中にある。井戸の深さを  $W$  として、電子が  $W$  以上のエネルギーを受け取ると、それは外部に放出される。このとき電子の持つ運動エネルギーは  $h\omega - W$  である。 $W$  は仕事関数と呼ばれる。実験で見られた光電効果が起こる最長の波長  $\lambda_0$  を用いると、 $W = 2\pi c/\lambda_0$  となる。
2. 光の強さは、単位時間あたりに物質に到達する光子の数に比例する。光を強くしても光子ひとつあたりの持つエネルギーは変わらない。従って  $h\omega < W$  の場合は、いくら光を強くしても光電子放出は起こらない。
3. 一方  $h\omega < W$  の場合は、光を強くすると、電子の放出量もそれに比例して大きくなる。

以上のように光は粒子的な性質を持つ。ただし、光が波動的性質を持つことも実験から動かしがたい事実であるから、光は波動性と粒子性を併せ持つものと考えられる。

### 1.1.3 コンプトン散乱

物質に X 線 (1895 年にレントゲン (Wilhelm Conrad Röntgen, 1845–1923) によって発見された) を照射すると、散乱される。これは X 線の電場が物質の電子を振動させ、振動する電子が再び振動電場すなわち X 線を生じさせる現象である。このような事情であるから、散乱された X 線は入射 X 線と同じ波長を持っていることが期待される。しかし、事実はそうではなかった。

1923 年にコンプトン (Arthur Holly Compton, 1892–1962) は物質によって散乱された X 線の中に、入射 X 線よりも長い波長を持つものが含まれていることを発見した。この結果は、光が運動エネルギー  $h\omega$ 、運動量  $h\omega/c = h/\lambda$  の粒子であるとして、この粒子が静止した電子に衝突して運動エネルギーと運動量の一部を与え、自身は跳ね返されると考えることによってよく説明される。

詳細な計算には特殊相対性理論の知識が必要であるので、ここではエネルギーと運動量のおおまかな値についてだけ考察しておこう。X線の光子エネルギー  $h\omega$  を  $100 \text{ keV} = 1.6 \times 10^{-14} \text{ J}$  とする。この場合の波長  $\lambda$  は  $\omega/2\pi = c/\lambda$  により  $0.012 \text{ nm} = 0.012 \times 10^{-9} \text{ m}$  程度となる。この光子の運動量は上の定義によると  $h/\lambda = 5.3 \times 10^{-23} \text{ kg m/s}$  程度となる。

光子の持つ運動量が仮に全て電子の(古典的な)運動量変化  $m\Delta v$  ( $m\Delta v$  は早さの変化) に変換されたとすると、 $\Delta v = 5.8 \times 10^7 \text{ m/s}$  となる。一方古典的な運動エネルギーの式  $E = mv^2/2$  を用いて  $100 \text{ keV}$  の運動エネルギー  $E$  を持つ電子の速度を計算すると  $1.9 \times 10^8 \text{ m/s}$  となる。前者は光速  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$  の20%程度、後者に至っては60%を超える。このような高速度で運動する粒子においてはここでやったような古典的な取り扱いが破綻し、相対論的な取り扱いが必要であることが知られている。正しい取り扱いは相対論を学んでからということにして、ここでは、光の運動量とエネルギーは、電子のそれらを変化させるに十分であることのみを指摘しておこう。

最後に、光の粒子の運動量  $h/\lambda$  を正当化する若干の補足説明を述べる。古典電磁気学における荷電粒子の運動についての考察によると、電磁波(光)のエネルギー流れ密度は  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = ncu$  と与えられる。(左辺の意味はここではわからなくても大丈夫である。)ここで、 $\mathbf{E}$  は電場、 $\mathbf{H}$  は磁場  $n$ : 流れ方向(すなわち光の進行方向)の単位ベクトル、 $u$  は単位体積あたりの電磁場のエネルギーである。この式は単位体積空間あたりに蓄えられたエネルギー  $u$  が速度  $c$ (光速)で伝搬することを意味している。

一方、同じく古典電磁気学における荷電粒子の運動を運動量保存則の観点から検討すると電磁場は運動量密度

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = n \frac{u}{c}$$

を持つと結論される。すなわち単位体積あたりの電磁場の運動量(の大きさ)は電磁場のエネルギーを  $c$  で除したものである。

以上の関係をエネルギー  $h\nu$  を持つ光子に適用すると、光子の運動量は

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

で与えられると予想される。

## 1.2 電子の波動性

20世紀に入って原子が電子と原子核とからなっていることがわかってきた。しかし、これは原子の安定性に重大な疑問を投げ掛けるものであった。この疑問に対する考察が、量子力学へとつながっていく。

### 1.2.1 電子

低圧力の気体を閉じ込めた容器に電極をとりつけ高い電圧をかけると放電が起こる。このような容器を放電管という。1800年代後半に真空技術の進歩によって放電管内の到達可能圧力が下がってくると、負側の電極(陰極)側からなんらかの放射線がでていたことが次第に明らかに

なってきた。この放射線は「陰極線」と呼ばれるようになった。J.J. トムソン (Sir Joseph John Thomson, 1856–1940) は 1897 年に電場中を通過する陰極線が曲げられる現象を観測し、陰極線が負の電荷を持った粒子であることを明らかにした。また、この粒子の持つ電荷と質量の比 (比電荷)  $e/m$  を測定した。この粒子が電子である。

### 1.2.2 原子核

先の光電効果で示されるように、物質中には電子が多数含まれていると考えられる。一方、物質は通常電氣的に中性なので、物質を構成する原子には、含まれている電子の負電荷を打ち消すだけの正の電荷を持つ部分が必要である。そこで、原子はどのような構造を持っているのかが問題となってきた。J.J. トムソンは正の電荷を持つ雲の中に粒々の電子が浮かんでいる干しぶどう入りパン型模型を提唱したが、これはやがて否定されることになる。

原子の構造について述べる前に、その背景となった放射能の研究について概観しよう。

- 1896 年ベクレル (Henri Becquerel, 1852–1908)

引き出しの中に写真乾板とともに入れられたウラン塩から何らかの放射線がでており、これが写真乾板を感光させることを発見。

この現象は様々なウラン化合物で見られることが明らかになり、ウラン原子そのものの性質であると結論。

- 1897 年頃 マリー・キュリー (Maria Sklodowska Curie, 1867–1934)

当時知られていた物質の中でウラン以外にトリウムも放射線を出すことを発見し、この性質に放射能と名付ける。

- 1898 年 マリー・キュリー、ピエール・キュリー (Pierre Curie, 1859–1906)

ウランを含むピッチブレンドと呼ばれる天然鉱石の精製を行い、より強い放射線を出す新しい元素「ポロニウム」を発見。ついで G. ベモンとの共同研究によりラジウムを発見。

- 1898 年 ラザフォード (Ernest Rutherford, 1871–1937)

ウランから  $\alpha$  線と  $\beta$  線の 2 種類の放射線が出ていることを発見。これらは磁場に対する曲げられ方が異なる。

数年以内に  $\beta$  線は電子とわかった。 $\alpha$  線は、電子と反対符号の電荷を持ち、もっと重い粒子からなる。これは何だろうか？

- 1903 年頃 ラザフォード

比電荷の測定により  $\alpha$  線がヘリウムイオンの流れであると結論。

- 1909 年 マースデン (Ernest Marsden, 1889–1970) とラザフォード

金薄膜に  $\alpha$  線を照射すると、大きな角度変化を伴って散乱されることがある。(ラザフォード散乱)

原子の大きさは物質の密度から考えて  $\sim 10^{-10}$  m 程度である。このような半径を持つ剛体球やひろがった電荷分布による散乱はいずれも実験を説明できない。

- 1911年 ラザフォード

原子の中心の  $\sim 10^{-14}$  m 程度の領域に正電荷  $+Ze$  が集中 (原子核)。原子半径程度の軌道を電子が回っているモデルを提唱。

しかしながら上記の仮説は電磁気学とは矛盾するものであった。例えば、電磁気学の結果によると、回っている電子は電磁波を放出して次第にエネルギーを失う。従って、電子は最初原子核の回りを周回していたとしてもいずれ原子核に落ち込んでしまう。また、放出される電磁波の振動数は単位時間あたりの電子の回転数に等しい。回転半径が時間の経過と共に小さくなると、周期が短くなり、振動数は高くなる。従って観測される光スペクトルは連続スペクトルが観測されるはずであるが、次節で述べるように観測結果は離散的なスペクトルである。

### 1.2.3 原子スペクトル

真空放電管からでてくる光の研究が進むにつれて以下のようなことがわかってきた。

- 真空放電管から出てくる光は、弱い帯状の連続スペクトルと強い線スペクトルの重ね合わせである。
- 帯スペクトルは温度を上げると消える。帯スペクトルの起源は分子の運動で、高温になると分子が解離するためと考えられる。
- これに対して、温度を上げて消えない線スペクトルは原子そのものから放出される光と考えられる。
- 水素原子の可視域のスペクトルに驚くべき規則性が発見された。1884年 バルマー (Johann Jakob Balmer, 1825–1898) バルマー系列の発見。

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 2^2} B \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

ただし  $B = 3.646 \times 10^{-7}$  m である。

- 更なる系列の発見

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad n = m + 1, m + 2, m + 3, \dots$$

$R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  はリュードベリ一定数と呼ばれる。

$m = 1$  : ライマン系列 (遠紫外, 1906)

$m = 2$  : バルマー系列 (可視, 1884)

$m = 3$  : パッシェン系列 (近赤外, 1908)

$m = 4$  : ブラケット系列 (近赤外, 1922)

$m = 5$  : ブント系列 (近赤外, 1904)

### 1.2.4 ボーアの水素原子モデル

ラザフォードの原子モデルには以下のような問題点があった。

- 電荷  $+Ze$  を持つ原子核のまわりを円運動する電子の運動を古典的に扱うと

$$m\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$$

の関係がある。ここで  $m$  : 電子の質量、 $r$  : 軌道半径、 $\omega$  : 回転の角振動数である。この結果は  $\omega^2 r^3 = \text{一定}$  の条件をみたす様々な半径の原子が存在し、異なる半径の原子に対応して異なる振動数の光が観測されるはずである。半径が連続的に分布していれば振動数も連続的になる。

- 一方、原子の半径はほぼ決まっているし、原子の発光スペクトルも連続ではない。

これに対して 1913 年頃、ボーア (Niels Bohr, 1885–1962) は以下の仮定に基づく新しい原子のモデルを提唱した。

1. 古典力学的に水素原子の軌道半径  $r$  は任意の値を取りうるが、現実の水素原子は「定常状態」と呼ばれる特別な軌道半径のみをとる。
2. 定常状態間の移行 (これを遷移という) は、普通の古典力学・電磁気学的に扱うことはできない。遷移の際にはふたつの定常状態のエネルギーの差  $E_1 - E_2$  に等しいエネルギー  $h\nu$  を持つ光子が (ひとつ) 放出される。すなわち  $E_1 - E_2 = h\nu$  である。

以下にボーアの理論のあらましを述べる。

$+Ze$  の電荷を持つ原子核の回りを質量  $m$ 、電荷  $-e$  の電子が半径  $r$  の円軌道を描いて運動している古典的な原子においては

$$m\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (1.6)$$

の関係が成り立つ。ここで  $\omega$  は電子の回転の角振動数 (角速度)、 $v$  は電子の速さ、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。また、 $Z$  は原子の原子番号で水素原子の場合は  $Z = 1$  である。

この原子の持つエネルギーを電子の運動エネルギーとクーロンエネルギーの和と求めてみよう。 $r \rightarrow \infty$  のときのエネルギーを 0 とすると、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (1.7)$$

ここで式 (1.6) より

$$r = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m\omega^2} \right)^{1/3}, \quad mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = m\omega^2 r^2 = \left( \frac{mZ^2 e^4 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \right)^{1/3} \quad (1.8)$$

従って

$$E = - \left( \frac{mZ^2 e^4 \omega^2}{128\pi^2 \epsilon_0^2} \right)^{1/3} \quad (1.9)$$

となる。ここまでは全く古典的である。

次にボーアの仮定により、エネルギー  $E_1$  を持つ軌道 1 からエネルギー  $E_2$  を持つ軌道 2 への遷移が起こるときには

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h} \quad (1.10)$$

の振動数の光が放出される。一方バルマーの公式によると水素原子が放出する光の振動数は

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cR \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad n_1 > n_2 \quad (1.11)$$

と表される。そこで (理由はわからないが) 原子のエネルギーが

$$E_n = -hcR \frac{1}{n^2} \quad (1.12)$$

のようにとびとびの値だけが許されるものとしよう。明らかに大きな  $n$  に対しては大きな  $r$  が対応する。

$n$  が大きくなると許されるエネルギーの間隔は狭くなる。非常に大きな  $n$  に対してはエネルギー  $E_n$  は事実上連続的になる。大きな  $n$  のところでの現象が古典的な現象と一致することを要求しよう。すなわち大きな  $n$  に対して  $n+1 \rightarrow n$  の遷移が起こると振動数  $\omega/2\pi$  の光が放出されるとする。(このような関係に対応原理という)

$$\nu = cR \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \simeq \frac{2cR}{n^3} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.13)$$

であるから、これを関係式

$$E_n = -hcR \frac{1}{n^2} = - \left( \frac{Z^2 e^4 m \omega^2}{128 \pi^2 \epsilon_0^2} \right)^{1/3} = - \left( \frac{Z^2 e^4 m 4 \pi^2 \nu^2}{128 \pi^2 \epsilon_0^2} \right)^{1/3} \quad (1.14)$$

に代入することにより

$$R = \frac{m Z^2 e^4}{8 h^3 \epsilon_0^2 c} \quad (1.15)$$

が得られる。

理論が正しければ、水素原子に対して実験的に得られた  $R$  と  $Z=1$  に対して計算された上式の右辺が等しくなるはずである。実際  $Z=1$  に対して右辺を計算すると  $1.1 \times 10^7$  m 程度となり、実験値とよく一致する。

ボーアの原子モデルは水素原子のスペクトル線を非常に良く再現したが、量子化の条件の物理的な意味は何なのだろうか。そのひとつの手がかりは軌道の角運動量である。円軌道の場合には角運動量は

$$l = m r^2 \omega$$

で与えられる。式 (1.8) と (1.14) を用いてこれを計算すると、 $n$  番目の軌道について

$$l = \frac{h}{2\pi} n$$

となる。これを量子化の条件と考えることもできる。

### 1.2.5 ドブロイ波

ド・ブロイ (Louis de Broglie, 1892-1987) は、光の波動・粒子の2重性から考えを巡らし、電子のような粒子にも波動的な性格があるのではないかと考えた。粒子の運動は運動エネルギー  $E$  と運動量  $p$  によって特徴づけられる。一方波動は振動数  $\nu$  と波長  $\lambda$  によって特徴づけられる。ドブロイは1924年相対論的な考察に基づき  $E = h\nu$ ,  $p = h/\lambda$  の関係があるとした。

以下に電子の波長と運動量の関係について考察しよう。一般に単一の振動数  $\nu$  と波長  $\lambda$  を持つて伝搬する波は

$$\exp\left\{i\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi\nu t\right)\right\} = \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

と表される。ただし波の進行方向を  $x$  方向にとった。  $k = 2\pi/\lambda$  は波数と呼ばれる量、  $\omega = 2\pi\nu$  は角振動数である。波は  $v_p = \nu\lambda = \omega/k$  の速度を持つて伝搬する。  $v_p$  を位相速度と呼ぶ。  $\omega$  と  $k$  の関係  $\omega = \omega(k)$  を分散関係と呼ぶが、  $\omega$  が  $k$  の1次関数でなければ  $v_p$  は  $k$  に依存して変化する。

波動に粒子的な性質を与えるひとつの方法は波束を考えることである。波束は、波長の異なる波の重ねあわせで表すことができる。波束の伝搬する速度は群速度  $v_g$  と呼ばれ、一般に位相速度  $v_p$  とは異なる。波束を

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\{i(kx - \omega(k)t)\} dk \\ &\simeq f(x, t) \exp\{i(k_0x - \omega_0t)\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

と表してその群速度を求めよう。1行目は  $u(x, t)$  が  $k$  の異なる波動の重ね合わせで表されている。それぞれの波の振幅は  $A(k)$  である。これは、Fourier積分に似ているが、  $\omega$  が  $k$  に依存しているので一般にはFourier積分ではない。この波束は近似的に2行目のように包絡線  $f(x, t)$  を持つて変化する波動  $\exp\{i(k_0x - \omega_0t)\}$  を表している。  $f(x, t)$  は  $\exp\{ik_0x\}$  に比べて十分にゆっくりと変化するものとする。この時  $A(k)$  は  $k \sim k_0$  の近傍でのみ0でない。この事実を利用して  $\omega(k)$  を  $k = k_0$  の周囲でTaylor展開して  $k - k_0$  の1次までの近似で  $u(x, t)$  を表すと

$$\begin{aligned} u(x, t) &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\left\{i\left(kx - \omega(k_0)t - \frac{d\omega(k_0)}{dk_0}(k - k_0)t\right)\right\} dk \\ &= \exp\{-i(\omega(k_0)t - k_0x)\} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\left\{i(k - k_0)\left(x - \frac{d\omega(k_0)}{dk_0}t\right)\right\} dk \end{aligned} \quad (1.17)$$

となる。ここで右辺の積分で  $t = 0$  としたものの

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k - k_0)x} dk = a(x) \quad (1.18)$$

を用いると

$$u(x, t) = \exp\{-i(\omega(k_0)t - k_0x)\} a\left(x - \frac{d\omega(k_0)}{dk_0}t\right) \quad (1.19)$$

となる。これは  $a(x)$  で表される波束が、速度  $d\omega/dk$  で伝播していくことを表している。この速度が群速度に対応する。

さて話を電子の波動に戻そう。電子波動の振動の量子化エネルギーが粒子としての電子の運動エネルギーと等しいという条件、および電子波動の群速度が粒子としての電子の速度と等しいという条件を設定し、これをみたく電子波動の分散関係がどうなるかを考えてみる。

$$\begin{aligned} h\nu &= \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \\ \frac{d\omega}{dk} &= v = \frac{p}{m} \end{aligned} \quad (1.20)$$

第1式を $\omega$ の定義式とみなして $d\omega/dk$ を求めると、

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} \left( \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m\hbar} \frac{dp}{dk} \quad (1.21)$$

が得られる。これを式(1.20)の第2式と比較することにより、

$$\frac{dp}{dk} = \hbar \quad (\text{定数})$$

すなわち

$$p = \hbar k$$

の関係が得られる。これが電子波動の波数と粒子の運動量との関係を与える式と考えられるが、この結果は先にのべた電子の運動量と波長との関係と合致している。

電子の波動的性質の直接的な検証は、1927~1928年ガーマー (Lester Halbert Germer, 1896–1971)、デヴィットソン (Clinton Joseph Davisson, 1881–1958)、トムソン (George Paget Thomson, 1892–1975)、菊池正士 (1902–1974) らにより相次いで干渉や回折によってなされた。ドブロイの式によると100 eVの運動エネルギーを持つ電子の波長は $1.2 \times 10^{-10}$  m程度となる。これは原子間隔と同程度なので、結晶によってX線と同様の回折が起こる。

### 1.2.6 ボーアの水素原子モデルと波動としての電子

ドブロイの電子波動の考え方は、ボーアの水素原子モデルの量子化の条件についてのある程度合理的な物理的な解釈を与える。既に見たようにボーアの量子化の条件は

$$l = rp = \hbar n$$

である。ここでドブロイの関係式によって電子波の波長 $\lambda$ を導入しよう。

$$\frac{rh}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} n$$

これを少し変形すると

$$2\pi r = n\lambda$$

となる。これは電子軌道の周長が電子波の波長の整数倍であることを意味している。電子が所定の波長を持った波動であるとする、軌道の周長が波長の整数倍でなければ、電子が何度も軌道を周回する間に打ち消しあって消えてしまうので、この条件は妥当なものと考えられる。

しかしながら、このような量子化の条件の与え方は、水素原子のモデルに特化したもので、一般性を欠くものであった。



### 1.3 量子力学への道

ドブロイの粒子波やボーアの水素原子モデルを説明しうる量子力学はいくつかの独立した流れとして現れた。ハイゼンベルグ (Werner Heisenberg, 1901–1976) は 1925 年行列力学の考え方を提唱し量子力学の基礎を築いた。ディラック (Paul Adrian Maurice Dirac, 1902–1984) はハイゼンベルグらとは独立に量子力学の一般的な定式化を行った。シュレーディンガー (Erwin Schrödinger, 1887–1961) は、1926 年さらに異なる量子力学の形式をみつけた。

#### 1.3.1 Schrödinger の波動方程式

ここでは波動力学とも呼ばれる Schrödinger の形式を概観する。ドブロイの関係を満たし  $x$  方向に運動する自由粒子の波動は

$$\exp\{i(kx - \omega t)\}$$

のように表される。波動力学では、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

の解  $\psi$  としてこれが与えられるとする。  $\psi$  を波動関数という。この方程式は古典的なエネルギー

$$\frac{p_x^2}{2m} = E$$

において

$$p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

および

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

の置き換えを行って演算子を形成し、これを波動関数  $\psi(x, t)$  に作用させることによって得られる。左辺の演算子をハミルトニアンという。

粒子が  $V(x)$  で与えられるポテンシャル中を運動するときは、古典的な系のエネルギーは

$$\frac{p_x^2}{2m} + V(x) = E$$

となる。これに対応して波動方程式は

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (1.22)$$

となる。この波動方程式では左辺のハミルトニアン演算子は時間を含んでいない。このような場合、波動関数は

$$\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x)$$

のように表される。  $\psi(x)$  は時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x) = E\psi(x)$$

の解である。 $E$  は系の全エネルギー (粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和) を表す。波動関数に適切な境界条件を課すると  $E$  の値が制限されることがある。許される  $E$  の値をエネルギー固有値と呼び、対応する波動関数を固有関数と呼ぶ。境界条件は考えている問題によって異なる。無限遠から電子がやってきて無限遠に飛びさるような問題では、無限遠で波動関数が発散しないことを境界条件とする。一方、電子がある領域に閉じ込められている場合には、適当な位置で波動関数が 0 になることを境界条件とする。

波動関数  $\psi(x, t)$  の物理的な意味は当初不明であったが、1926 年にボルン (Max Born, 1882–1970) による確率解釈が示され、今日に至るまで大方の支持を得ている。これは  $|\psi(x, t)|^2 dx$  が時刻  $t$  において  $x \sim x + dx$  の微小な空間要素中に粒子を見出す確率に比例するというものである。 $\psi$  を任意定数倍したのも波動方程式を満たすが、特に

$$\int |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

になるように選ばれた  $\psi$  を規格化されているという。規格化された波動関数については  $|\psi(x, t)|^2 dx$  は時刻  $t$  において空間要素  $x \sim x + dx$  中に粒子を見出す確率を与える。

### 1.3.2 1次元ポテンシャル中の粒子

式 (1.22) で表される 1次元の粒子の運動の問題を、いくつかの特徴的な 1次元ポテンシャルを仮定して解いてみよう。

まず無限の深さのポテンシャル井戸の場合を考えよう

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < d), \\ +\infty & (x \leq 0 \text{ or } x \geq d) \end{cases}$$

ポテンシャルが 0 になる  $x$  の領域では、これは自由粒子の方程式と同じになる。 $x = 0$  および  $x = d$  ではポテンシャルが無限大のため粒子は存在できない。従って境界条件として  $x = 0, d$  において  $\psi = 0$  を要求する。これらをもたす波動関数は

$$\psi(x) = A \sin k_n x$$

と表される。ただし

$$k_n = \frac{\pi}{d} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。 $A$  は定数で、必要であれば  $\psi$  が規格化されるように選ばれる。 $k_n$  が離散的な値をとることに注意しよう。このため粒子のエネルギーも離散化され

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2md^2}$$

となる。最低のエネルギーをとる状態を基底状態という。この場合の基底状態は  $n = 1$  で、エネルギーは 0 にならないことに注目されたい。

次に有限の高さのポテンシャル障壁がある場合を考えよう。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (0 < x < d), \\ 0 & (x \leq 0 \text{ or } x \geq d) \end{cases}$$

ただし  $V_0 > 0$  とする。  $x = -\infty$  から波数  $k$  の電子波が障壁に向けて進んでくるとしよう。この電子のエネルギーは

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

である。  $E < V_0$  の場合を考える。古典力学では、この粒子はポテンシャル障壁を越えることができず、障壁で跳ね返されて  $-x$  方向に飛び去る。しかし量子力学では事情が異なる。というのは、  $0 < x < d$  の領域で波動関数は

$$\psi(x) = Be^{\xi x} + Ce^{-\xi x}$$

となり、0にならないのである。ただし

$$\frac{\hbar^2 \xi^2}{2m} = V_0 - E$$

である。  $B, C$  は定数である。  $x < 0$  では波動関数は

$$\psi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$$

と表される。第2項は障壁で反射される波である。  $x > d$  の波動関数は

$$\psi(x) = De^{ikx}$$

と表される。この領域では  $+x$  方向に進む波のみ存在する。定数  $A, B, C, D$  は、  $x = 0, d$  において  $\psi$  および  $d\psi/dx$  が連続であるという境界条件によって決定される。ここでは、計算の詳細は省略し、  $D$  が0でないことだけを指摘しておこう。このように粒子が自分の運動エネルギーよりも高いポテンシャル障壁を通り抜ける現象をトンネル効果と呼び、量子力学に特有の現象である。

### 1.3.3 水素原子

前節で扱った1次元の波動方程式は次のようにして3次元に拡張できる。3次元空間のポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  中を運動する古典的な粒子の全エネルギー(ハミルトニアン)は

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(\mathbf{r}) = E$$

である。ただし  $p_x, p_y, p_z$  はそれぞれ運動量の  $x, y, z$  成分である。

量子力学に移行するためには

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

および

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

の置き換えを行い、ハミルトニアンを演算子に変える。この演算子を用いて波動方程式は

$$\left\{-\frac{1}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right\}\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t)$$

と表される。ただし  $\Delta$  はラプラシアンと呼ばれる演算子で

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。

水素原子の電子の運動を考える場合は

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

として、波動関数を求める。このようにポテンシャルが中心対称を持つ場合には、空間の座標を  $x, y, z$  で表すデカルト座標系を用いるよりも、 $r, \theta, \phi$  で表す極座標系を用いるのが便利である。時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\left\{-\frac{1}{2m}\Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right\}\psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi)$$

となる。 $r \rightarrow \infty$  で  $\psi$  が 0 に収束すること、および  $\psi$  は  $\phi$  について周期  $2\pi$  の周期性を持つことによって、解として許される  $\psi$  が限定され、エネルギーが離散化される。

上の Schrödinger 方程式を実際に解くには、量子力学の講義にゆずり、ここではその結果だけを概観しよう。 $E < 0$  のもとで境界条件を満たす方程式の解 (波動関数) は

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

の形に表される。 $n, l, m_l$  は異なる解を区別するために用いられる指標でそれぞれ主量子数、方位量子数、磁気量子数と呼ばれる。 $n$  は  $1, 2, 3, \dots$  のように自然数をとる。エネルギー固有値は  $n$  だけに依存し

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2\hbar^2n^2}$$

となる。これはボーアの結果に完全に一致する。 $l$  は  $0, \dots, n-1$  の値をとり、 $m_l$  は  $-l, -l+1, \dots, l$  の値をとる。例えば  $n=1$  に対しては  $l=0, m_l=0$  のみが許されるが、 $n=2$  に対してはこの他に  $l=0, m_l=\pm 1, 0$  の3つの状態が許される。

電子にはさらにスピンと呼ばれる量子状態があり、これは2つの状態を取りうる。電子に対してはパウリの排他律と呼ばれる規則があり、同一の状態に2つの電子が入ることが許されない。上で求めた  $n, l, m_l$  で指定される各状態にはスピンの自由度を含めて2つの電子が入りうる。従って  $n=1$  の状態には2つの電子が、 $n=2$  の状態には8つの電子が入る。これらの結果は元素の周期律表の物理的な意味を与える。

## 2 特殊相対性理論

ここで再び19世紀末の世界に戻ろう。この時代の物理学の大きな謎は2つあった。ひとつは黒体放射の問題である。これがやがて量子力学の誕生へとつながったのは前章で概観した通りである。もうひとつの問題は、電磁波(光)は何を伝わっているのかという疑問であった。この問題は、アインシュタインの相対性理論によって解決されることになる。

### 2.1 ガリレイの相対性

古典力学はニュートンの運動方程式で記述される。ある慣性系  $K$  上にいる観測者が質量  $m$  の質点の運動を観測すると

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$$

に従っていることを見出すであろう。ここで  $\mathbf{F}$  は質点に働く力、 $\boldsymbol{\alpha}$  は質点の加速度である。質点の位置を  $K$  系に固定された点  $O$  からの位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を用いて記述することになると、

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

である。

同じ運動を  $K$  に対して速度  $u$  で運動している別の慣性系  $K'$  上の観測者が観測することを考えよう。時刻  $t = 0$  に  $K$  と  $K'$  の原点が一致していたとする。時刻  $t$  における質点の位置を  $K'$  系の原点  $O'$  からの位置ベクトル  $\mathbf{r}'$  で表すと

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \quad (2.1)$$

である。このような慣性系間の変換をガリレイ変換という。

さて、 $K'$  系における加速度を求めるために、上式を2階微分すると

$$\boldsymbol{\alpha}' = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \boldsymbol{\alpha}$$

となって、 $K$  系の加速度と等しいことがわかる。質点に働く力は  $K$  系と  $K'$  系で同じとすると(これは自明ではない)、 $K'$  系の観測者も、質点の運動がニュートンの運動方程式

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}'$$

に従うことを見出す。

上の結果は、ニュートンの運動方程式が慣性系の取り方に依らず同じ形で成り立つことを示している。このような性質を不変性という。すなわち、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換のもとで不変である。慣性系は互いに完全に相対的であり、力学的な観測からは、いずれかの慣性系が特別であるというようなことは言えない。これをガリレイの相対性という。

上のような不変性は電磁気学においても成り立つであろうか？ 電場  $\mathbf{E}$  および磁束密度  $\mathbf{B}$  の中を運動する荷電粒子には

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

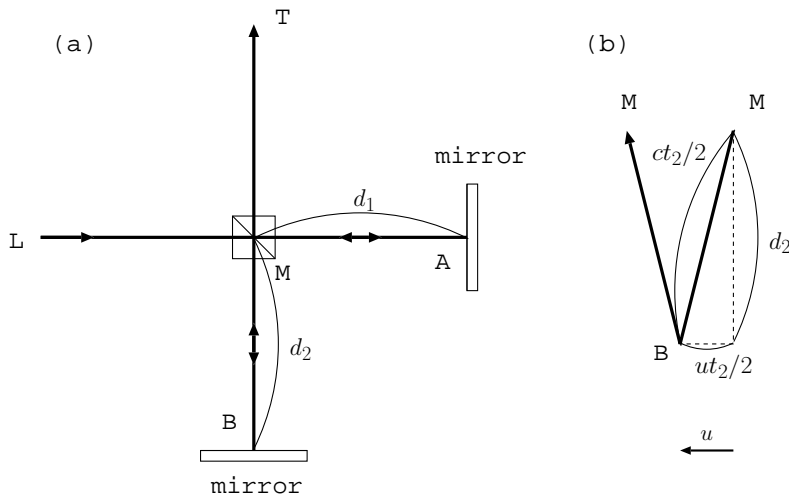


図 1: (a) マイケルソン・モーレーの実験。(b) エーテルの河を横切る光。

のローレンツ力が働く。 $q$  は粒子の電荷、 $v$  は粒子の速度である。粒子を慣性系  $K$  で観測しているとすれば

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

である。同じ運動を慣性系  $K'$  で観測すると、速度は

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

となる。従ってもしローレンツ力が慣性系  $K$  と  $K'$  で等しいことを要求するなら、 $K'$  系における電場  $\mathbf{E}'$  と磁束密度  $\mathbf{B}'$  とは、 $K$  系における  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  とは異なることになる。このような変換規則およびそれに適合する電磁場の方程式はどうあるべきか、が 19 世紀末の物理学の重要な問題のひとつであった。

## 2.2 マイケルソン・モーレーの実験

マックスウェル (James Clerk Maxwell, 1831–1879) は 1864 年電磁場を記述する Maxwell 方程式を発表し、これに基づいて電磁波の存在を予言した。また光が電磁波であると提唱した。ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894) は 1888 年に火花放電による実験で電磁波の存在を実証した。電磁波よりもずっと身近な存在である音波は、空気や水などの物質を媒体として伝わる弾性歪みの波である。電磁波の発見は、同時に、電磁波を伝える媒体は何なのかという疑問を生じさせることになった。

電磁波を伝える仮想的な物質はエーテルと名付けられた。そして無数に存在する慣性系の中でエーテルに対して静止している絶対慣性系が存在し、Maxwell 方程式は絶対慣性系において成り立つものと考えられた。これによると Maxwell の方程式より得られる光速  $c$  は、絶対静止するエーテルに対する速さと考えられる。従ってエーテルに対して速さ  $u$  で運動している観測者が光速を測定すると、その運動の方向に応じて  $c - u$  から  $c + u$  の値を見出すはずである。

地球は秒速 30 km で太陽の周りを公転しているので、もし絶対静止するエーテルが存在するならば、地上で観測する光の速度はその伝搬方向により最大で  $\pm 30$  km/s 変化するはずである。マイケルソン (Albert Abraham Michelson, 1852–1931) とモーレー (Edward Morley, 1838–1923)

はこの「エーテルの風」を検出するために図 1(a) のような装置を用いて以下のような実験を行った。 $L$  点から単色の光を入射する。半透過鏡  $M$  によって分割された光は、鏡  $A$  または  $B$  で反射された後再び  $M$  に戻り、その一部は合わさって  $T$  点にて観測される。このとき 2 本の光ビームがごく僅か平行からはずれていると干渉による縞模様が観測される。

さて、絶対静止のエーテルに対して測定装置が図中の  $M \rightarrow A$  の方向に速さ  $u$  で運動しているとしよう。 $M \rightarrow A$  の方向に進む光は、エーテルの向かい風を受けることになり、その伝播速度は  $c - u$  となる。一方  $A \rightarrow M$  に進む光は、エーテルの追い風を受けて  $c + u$  の速度で伝播する。 $M$  を出た光が  $A$  で反射して再び  $M$  に戻るまでに要する時間  $t_1$  は

$$t_1 = \frac{d_1}{c - u} + \frac{d_1}{c + u} = \frac{2cd_1}{c^2 - u^2}$$

となる。

次に  $M$  を出て  $B$  で反射されて  $M$  に戻ってくる光について考えよう。光は速さ  $u$  で流れるエーテルの河を横切って進まなければならない。 $M \rightarrow B \rightarrow M$  の伝播に要する時間を  $t_2$  とすると、光が実際に進まなければならない距離は  $2\sqrt{d_2^2 + (ut_2/2)^2}$  となり、これは  $ct_2$  に等しい。すなわち

$$t_2 = \frac{2d_2}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

となる。

このように  $A$  を経由する光と  $B$  を経由する光は、伝播に要する時間が異なるために、光が  $T$  に到達したときにはこの時間差  $t_1 - t_2$  に対応する位相差

$$\delta\phi = \omega(t_1 - t_2)$$

が発生する。 $\omega$  は光の角振動数である。 $T$  点で観測される干渉縞の位置は、この位相差によって決定される。

次に装置を 90 度回転させると、装置に対するエーテルの風の向きが変化する。この時の位相差は

$$t'_1 = \frac{2cd_2}{c^2 - u^2}$$

および

$$t'_2 = \frac{2d_1}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

を用いて

$$\delta\phi' = \omega(t'_1 - t'_2)$$

と与えられる。これは先の位相差とは異なるので、干渉縞の位置が移動するはずである。

マイケルソンとモーレーは  $l_1 = l_2 = 1.2$  m とした装置を用い 1887 年からこの実験を一日の様々な時間や、一年の様々な季節で繰り返したが、干渉縞の位置はほとんどずれなかったのである。すなわちエーテルの風は吹かなかったのである。

## 2.3 ローレンツ収縮と局所時間

マイケルソンとモーレーの実験結果と、エーテルを伝播する光の速度についての予想との矛盾を解消するために、ローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928) とフィッツジェラルド (George Francis Fitzgerald, 1851–1901) は、すべての物体はエーテルに対して運動する際に (理由は不明であるが) その運動法方向に  $\sqrt{1 - \beta^2}$  倍の長さになるように縮むと仮定した。ここで  $\beta$  はエーテルに対する速度  $u$  を用いて  $\beta = u/c$  と定義される。そうすると前節の結果で  $t_1$  は

$$t_1 = \frac{2cd_1\sqrt{1 - \beta^2}}{c^2 - u^2} = \frac{2d_1}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

となり、 $d_1 = d_2$  であれば  $t_1 = t_2$  となつて、装置を回転しても位相差を生じない。この物体の長さの収縮をローレンツ収縮という。

さてローレンツ収縮を考慮しても  $d_1 \neq d_2$  のときには

$$\delta\phi = \omega(t_1 - t_2) = \frac{2\omega(d_1 - d_2)}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

は0でない。地球にエーテルに対する速さ  $u$  は時間的に変化すると考えられるから、これにより干渉縞の位置は時間的に移動すると予想される。しかし、実験結果は再び否定的であった。そこで、エーテルに対して速さ  $u$  で運動している慣性系においては時間の流れが絶対静止系の  $\sqrt{1 - \beta^2}$  倍になっていると仮定する。すなわち、この慣性系では時間がゆっくりとながれていると考えるのである。そうすると光がふたつの光路を伝播するのに要する時間差は

$$t_1 - t_2 = \frac{2(d_1 - d_2)}{\sqrt{c^2 - u^2}} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{2(d_1 - d_2)}{c}$$

となつて、 $u$  に依存しなくなる。このような時間を局所時間と呼ぶ。

以上のようにローレンツ収縮と局所時間を導入すると、マイケルソン=モーレーの実験結果は説明できるが、これらの物理的意味が明らかでない以上、場当たりの間に合わせとの感が否めない。

## 2.4 アインシュタインの相対性原理

上で見てきたように、ローレンツ達は絶対静止系の存在をよりどころとして、不自然なローレンツ収縮と局所時間を導入することによりマイケルソン=モーレーの実験結果を説明しようとした。これに対して、アインシュタインはマイケルソン=モーレーの結果を額面通に解釈し、全ての慣性系において光の速度は一定であると考えた。そしてそれを物理学の基本原理のひとつに据えた。これを光速不変の原理という。光速不変の原理を認めると、マイケルソン=モーレーの実験結果は自明のことになる。

マイケルソン=モーレーの結果は、絶対静止系を実験的に検出できないことを示していると考えられる。そこで、アインシュタインは絶対静止系の存在を仮定することを捨て去り、全ての慣性系は互いに全く同等であることをもうひとつの基本原理とした。すなわち、互いに等速度運動している全ての慣性系において、全ての基本的自然法則は全く同等の形式で記



述される、とした。これを相対性原理または特殊相対性原理という。絶対静止系を捨てることは、エーテルを捨てることでもある。すなわち、いかなる手段を用いてもエーテルを検出することができないならば、エーテルの存在を主張する理由は無いということである。

さて光速不変の原理と相対性原理を認めると、我々の常識から乖離した結果が色々出てくる。例として、慣性系  $S$  と、 $S$  に対して速度  $v$  で走行する電車に固定された慣性系  $S'$  を考えよう。電車の車両(長さ  $l$  とする)の中央には光源が取り付けられている。 $S$  系において時刻  $t = 0$  になった瞬間に車両中央の光源が  $S$  系の原点に一致したとする。同時に光源から車両の前後方向に光を放射する。 $S'$  系の観測者は光が速度  $c$  で伝播し、時間  $l/2c$  経過後に、車両の前後端に同時に光が到達するのを見るだろう。一方、 $S$  系の観測者は光源から出た光がやはり速度  $c$  で前後方向に伝播するのを見るだろう。電車が速度  $v$  で走っているので、光は車両の後端に先に到着し、その後前端に到着するように見えるだろう。すなわち、 $S'$  系で同時に起こった2つの事象が、 $S$  系では同時でない。この事実は、我々が暗黙に仮定していた時間の概念、すなわち、時間は全ての慣性系で共通である、という命題が真ではないということを意味している。

慣性系  $S$  においてある時刻  $t$  における座標  $(x, y, z)$  を組にして  $(x, y, z, t)$  と表すことにしよう。このような空間と時間を組にして指定される点を世界点という。世界点が指定する時間と空間を組にして4次元時空という。

光速不変の原理と相対性原理に基づいて、互いに等速で運動している慣性系  $S$  と  $S'$  との間の座標と時間  $(x, y, z, t)$  および  $(x', y', z', t')$  の間の関係を求めよう。 $S'$  と  $S$  の原点が時刻  $t = t' = 0$  において一致したものとす。  $S$  系から見た  $S'$  系の原点の位置は  $S$  系において速度  $v$  で  $x$  軸の正の方向に移動しているとしよう。従って  $S'$  系の原点の位置は  $S$  系の座標と時間を用いて  $x = vt$  と表される。

相対性原理によると  $S$  系で等速運動している質点は、 $S'$  系でもやはり等速運動しているように観測される。時刻  $t = 0$  に原点を出発し時刻  $t$  に  $(x, y, z)$  点に到達する仮想的な等速運動を考えよう。この運動を  $S'$  系で観測すると時刻  $t' = t = 0$  に原点を出発し、時刻  $t'$  に  $(x', y', z')$  点に到達する等速運動と観測される。これらの軌跡は原点と  $(x, y, z)$  または  $(x', y', z')$  を結ぶ線分である。これを4次元時空における世界点を用いて記述すると、4次元時空における世界点  $(\mu x, \mu y, \mu z, \mu t)$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) の集合として表される。これは4次元時空において原点  $(0, 0, 0, 0)$  と世界点  $(x, y, z, t)$  を結ぶ4次元の直線と見なされる。

一般に  $S$  系で等速運動を観測すると、それは4次元時空における4次元直線として表される。このことから、 $S$  系における4次元直線は  $S'$  系においても4次元直線であるように変換されることがわかる。すなわち  $S$  系から  $S'$  系への座標変換は線形で無ければならないことがわかる。これは  $x', y', z', t'$  が  $x, y, z, t$  の1次式で表されることを意味している。

$S$  系において  $y = \text{一定}$  の面を考えよう。これは  $S'$  系においても  $y' = \text{一定}$  の面を与えると考えられる。ただし、 $S, S'$  の相対運動のために2つの慣性系での  $y$  方向の長さのとりかたが変化しているかも知れないので、

$$y' = a(v)y,$$

と表そう。 $a(v)$  は慣性系の相対速度  $v$  のみに依存する定数である。次に  $S, S'$  系の  $y$  軸および  $y'$  軸のまわりに座標軸を  $180^\circ$  回転させる。これにより  $y, y'$  座標値は変化しないが、 $x, x'$  軸は反対方向になる。ここで  $S'$  系から  $S$  系を見ると速さ  $v$  で反転された  $x$  軸の正の方向に運動してい

るように見える。これはもとの  $S$  系から  $S'$  系を見た場合と全く同じなので

$$y = a(v)y'$$

となる。ふたつをあわせると

$$y = \{a(v)\}^2 y'$$

すなわち

$$a(v) = \pm 1$$

であるとわかる。 $a$  は  $v$  に依存しないが、特に  $v = 0$  の場合を考えると複号は正にえらばなければならないことがわかる。すなわち

$$y' = y$$

である。同様にして

$$z' = z$$

である。

次に  $x$  と  $x'$  の間の関係を考える。 $x = vt$  のときは常に  $x' = 0$  となるので

$$x' = b(v)(x - vt) \tag{2.2}$$

のように変換することがわかる。先ほどと同様に  $y, y'$  軸の周りに座標軸を  $180^\circ$  回転させる。これによって  $S, S'$  の  $x, x'$  座標軸が  $X, X'$  と変換されるとしよう。元の座標と回転された座標の間には  $X = -x, X' = -x'$  の関係がある。ここで回転された座標系を持つ  $S'$  系から  $S$  系をながめると、 $S$  系は  $S'$  系に対して  $X$  軸の正の方向に  $v$  の速度で遠ざかっており、 $X' = vt'$  のとき  $X = 0$  である。

$$X = b(v)(X' - vt')$$

これを  $S, S'$  の回転する前の座標系で表わすと

$$-x = b(v)(-x' - vt') \tag{2.3}$$

となる。(2.2) 式と (2.3) 式とをあわせると

$$x = b(v)(b(v)(x - vt) + vt')$$

となる。 $t'$  について解くと

$$t' = b(v)t - \frac{\{b(v)\}^2 - 1}{b(v)v}x$$

となる。

$b(v)$  は光速度不変の原理を用いて決定できる。時刻  $t = 0$  に原点から光を四方に放射すると、時刻  $t$  における光の到達点は  $S$  系において

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{2.4}$$

で表される球面を形成する。同じ光を  $S'$  系において観測すると、光速度不変の原理により

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

である。これに上で求めた  $x'$  と  $t'$  等を代入すると

$$\begin{aligned} & \{b(v)\}^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2\left\{b(v)t - \frac{\{b(v)\}^2 - 1}{b(v)v}x\right\}^2 \\ &= (b^2 - c^2\frac{(b^2 - 1)^2}{b^2v^2})x^2 + y^2 + z^2 - (c^2 - v^2)b^2t^2 + (2c^2\frac{b^2 - 1}{v} - 2b^2v)xt = 0 \end{aligned}$$

でなければならない。式(2.4)と比較すると

$$\begin{aligned} b^2 - c^2\frac{(b^2 - 1)^2}{b^2v^2} &= 1, \\ (c^2 - v^2)b^2 &= c^2, \\ 2c^2\frac{b^2 - 1}{v} - 2b^2v &= 0, \end{aligned}$$

でなければならない。これは

$$b(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

であれば満たされる。 $v = 0$ のときの振る舞いより複号は正を取る。まとめると

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。この結果はローレンツが先に導入したローレンツ収縮と局所時間の式と形式的には同じなので、ローレンツ変換と呼ばれている。ローレンツ変換において  $v/c \rightarrow 0$  の極限をとるとガリレイ変換に一致する。

式(2.5)を  $x, y, z, t$  について解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。 $S'$ 系からみれば  $S$ 系は  $x'$ 軸に沿って  $-v$ の速度で等速運動していることを考えると、この結果はローレンツ変換の不変性のひとつの表れであると解釈される。

ローレンツ変換を用いて、先に述べた電車に置かれた光源の問題を考えよう。電車に固定された慣性系を  $S'$ 、地上の観測者の慣性系を  $S$  に対応させる。電車は  $S$ 系から見て速度  $v$  で  $x$ 軸の正の方向に等速で走っている。時刻  $t = t' = 0$  において車輻の midpoint  $x = x' = 0$  に据え付けられ

た電球を点灯した。\$S'\$ 系の観測者にとっての車両の長さを \$l\$ とすれば、車輛の前後端 \$x' = \pm l/2\$ の位置に光の到達する時刻は \$t' = l/(2c)\$ である。これが \$S\$ 系からどのように見えるかというのが問題である。これは \$S'\$ 系における世界点 \$(x' = \pm l/2, t' = l/(2c))\$ が、\$S\$ 系における世界点にどのように変換されるかを考えればよい。式 (2.6) を用いると

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm \frac{l}{2} + v \frac{l}{2c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{\frac{l}{2c} \pm \frac{vl}{2c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

が得られる。複号の上側が電車の前端に光が到達するとき、下側が電車の後端に光が到達するときに対応する。明らかに光が電車の前後端に到達する時刻は異なっている。このように相対論的な世界では、ある慣性系における同時刻は、別の慣性系においては必ずしも同時刻では無い。

なお、\$S\$ 系の観測者にとっての光速は、式 (2.7) において \$|x/t|\$ で与えられ、電車の前端にとどく光と後端に届く光のいずれもが \$c\$ となる。すなわち \$S\$ 系の観測者にとっても \$S'\$ の観測者にとっても光速は \$c\$ である。

相対論は運動物体の長さの測定にも影響を与える。慣性系 \$S\$ において電車の車輛の長さを測ることを考えよう。運動物体の長さを測定する方法としては、\$S\$ における同一時刻に電車の前端位置 \$x\_1\$、後端位置 \$x\_2\$ を測定し、その差を長さとするのが妥当であろう。測定の時刻は \$t = 0\$ としよう。\$S'\$ 系の観測者にとっては電車は静止しているので、その前後端の位置は \$t'\$ にかかわらず \$x'\_1 = l/2\$、\$x'\_2 = -l/2\$ である。この問題は \$S'\$ 系における世界点 \$(x'\_1, t'\_1)\$、\$(x'\_2, t'\_2)\$ が、\$S\$ 系における世界点 \$(x\_1, t = 0)\$、\$(x\_2, t = 0)\$ に変換されるとしたときに、未知数 \$x\_1, x\_2, t'\_1, t'\_2\$ を求めることに帰着される。式 (2.5) を用いると

$$x'_{1,2} = \pm \frac{l}{2} = \frac{x_{1,2} - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Bigg|_{t=0} = \frac{x_{1,2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

すなわち、

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{1 - v^2/c^2} \frac{l}{2}$$

となる。\$\sqrt{1 - v^2/c^2} \le 1\$ なので、\$S\$ 系から見る車輛の長さは \$\sqrt{1 - v^2/c^2}\$ 倍に縮んで見えることになる。これはマイケルソンモーレーの実験を説明するためにローレンツが導入したローレンツ収縮と同じ結果であるが、ここでは相対論の当然の帰結として導かれたわけである。

相対論においては、先に見たように、時間の流れ方が慣性系によって異なる。電車に乗った人が一定時間毎に地面に印をつけていく場合を考えよう。すなわち、\$S'\$ 系の \$x' = 0\$ 点に陣取った観測者が時間 \$\Delta t'\$ 毎に印をつける。印の発生する世界点は \$(x' = 0, t' = n\Delta t')\$ である。ただし \$n\$ は自然数である。これを \$S\$ 系で観測すると式 (2.6) を用いて

$$\begin{aligned} x &= \frac{vn\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t &= \frac{n\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

となる。 $S'$ 系における時間間隔  $\Delta t'$  は  $S$ 系においては

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

となるのである。すなわち、運動している系の時計は遅れる。

## 2.5 ミンコフスキー空間

ミンコフスキー (Hermann Minkowski, 1864–1909) は、ローレンツ変換を幾何学的に表現する方法を見出した。これを用いると、上に述べた (一見すると非常識な) 相対論の結果を視覚的にとらえることができる。

慣性系  $S$  に対応する 4次元時空内の 2つの世界点  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  と  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  に対して、世界距離  $s_{12}$  を

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (2.8)$$

によって定義する。2つの世界点を別の慣性系  $S'$  から見たときに世界距離がどのように変化するかを調べよう。そのためには2つの世界点の座標をローレンツ変換によって  $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$  と  $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$  に変換し、それを用いて  $S'$ 系における世界距離  $s'_{12}$  を

$$s'^2_{12} = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2$$

によって求めれば良い。式 (2.5) を用いて具体的に計算すると  $s_{12} = s'_{12}$  であることが示される。すなわち、世界距離はローレンツ変換に対して不変な量である。なお、2つの世界点が光によって結ばれているときは世界距離は 0 である。

ミンコフスキーは  $x, y, z$  に  $ct$  を加えた 4つの座標を用いて世界点が指定される時空を考えた。この時空における距離は式 (2.8) で与えられるとする。このような時空をミンコフスキーの世界と呼ぶ。 $t$  のかわりに  $ct$  をもちいることによってローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となり、 $x, ct$  について対称な形に表すことができる。ただし  $\beta = v/c$  である。

簡単のために  $x, ct$  のみを含む 2次元ミンコフスキー時空の性質を調べてみよう。図 2 のように  $x$  軸、 $ct$  軸を直交するようにとる。この時空の 1点として表される世界点について、 $S'$ 系からみたときの座標値を読み取ることができるように、この空間に  $S'$ 系の  $x'$  軸、 $ct'$  軸を書き込むことを考えよう。 $x'$  軸は  $ct' = 0$  で与えられる。ローレンツ変換 (2.9) の第 4式を用いると直線

$$ct = \beta x$$

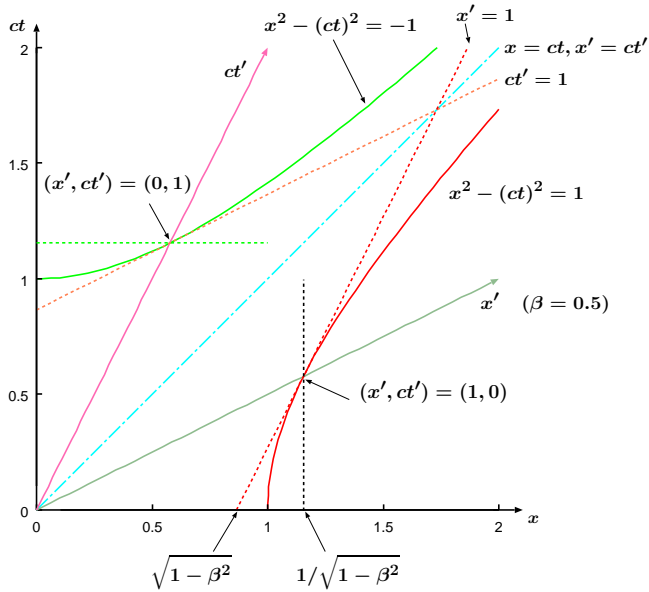


図 2: ミンコフスキーの時空。

が  $x'$  軸を表すことがわかる。同様にして  $ct'$  軸は  $x' = 0$  で与えられ、ローレンツ変換 (2.9) の第 1 式より直線

$$x = \beta ct$$

がそれを表す。  $x'$  軸と  $ct'$  軸は直交せず、  $x, ct$  軸から  $\tan \theta = \beta$  で与えられる角度  $\theta$  だけ傾いている。

次に  $ct' = a$  を与える直線を考えよう。  $a$  は定数である。式 (2.9) の第 4 式より

$$ct = \beta x + a\sqrt{1 - \beta^2}$$

となる。この直線は  $x'$  軸に平行で、  $ct$  軸と  $ct = a\sqrt{1 - \beta^2}$  で交わる。特に  $a = 1$  とすると  $S'$  系における単位時間と  $S$  系の  $(x, t)$  との関係が得られる。

同様にして  $x' = a$  を与える直線は

$$x = \beta ct + a\sqrt{1 - \beta^2}$$

で与えられる。これは  $ct'$  軸に平行で  $x$  軸と  $x = \sqrt{1 - \beta^2}$  で交わる。

これらをまとめると、ひとつの世界点の座標を  $S$  系で得ようとする場合は  $x$  軸と  $ct$  軸がつくる直交座標の座標値を、  $S'$  系で得ようとする場合は  $x'$  軸と  $ct'$  軸がつくる斜交座標の座標値を読み取れば良い。ただし、それぞれの座標系における単位の長さが異なることに注意する必要がある。この単位長さの関係は上の考察において既に得られているが、先の世界距離の不変性を用いて図形的にあらわすこともできる。  $x-ct$  座標系において原点からの世界距離が 1 になる座標点の集まりは

$$x^2 - (ct)^2 = 1$$

で与えられる双曲線曲線をなす。これは図 2 で  $x = 1, ct = 0$  を通り、  $x = \pm ct$  に漸近する曲線である。この双曲線上の点は  $S'$  の座標系においても原点からの世界距離が 1 である。従って双

曲線と  $x'$  軸の交点は  $x' = 1, ct' = 0$  を与える。このようにして  $x$  軸および  $x'$  軸の単位の長さが得られる。同様にして  $ct$  軸および  $ct'$  軸の単位の長さは角軸と双曲線  $x^2 - (ct)^2 = -1$  との交点から得られる。

$S$  系における同時刻の世界点の集合は  $x$  軸に平行な水平線をなすのに対し、 $S'$  系に対する同時刻の世界点の集合は  $x'$  軸に平行な直線をなしている。明らかに双方における同時刻をあらわす世界点の集合は一致しない。 $S'$  系の原点に固定された時計が  $ct' = 0$  から  $ct' = 1$  に進む過程は、 $ct'$  軸にそって原点から  $ct' = 1$  まで引いた世界線によって表される。同じ世界線を  $S$  系から観測すると直線  $x = \beta(ct)$  に沿った運動と解釈される。特に  $x' = 0, ct' = 1$  の世界点を  $S$  系の座標軸で読めば、

$$ct = 1/\sqrt{1 - \beta^2},$$

$$x = \beta/\sqrt{1 - \beta^2}$$

となつて、 $S$  系の時計は  $ct > 1$  を指している。すなわち  $S$  系からみて  $S'$  系の時計はゆっくりと進むように見える。逆に  $S$  系の原点の時計が  $ct = 0$  から  $ct = 1$  まで進む過程をあらわす世界線は、原点から  $ct$  軸にそった運動である。 $x = 0, ct = 1$  の世界点座標を  $S'$  系で読むためには、この点を通して  $x'$  軸および  $ct'$  軸に平行な直線を引き、それぞれの直線と  $ct'$  軸、 $x'$  軸との交点を読めば良い。これは、

$$x' = -\beta/\sqrt{1 - \beta^2},$$

$$ct' = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

となり、 $S'$  系からみた  $S$  系の時計もやはり  $S'$  系の時計よりもゆっくりと進む。

ミンコフスキーの時空を使うと運動物体のローレンツ収縮も簡単に表すことができる。 $S'$  系において静止している長さ 1 の棒を考えよう。棒の一端は  $x' = 0$  にあるとする。この棒はミンコフスキー時空において  $x'$  軸に平行で長さ 1 の線分として表され、時間の経過と共に  $ct'$  軸方向に平行移動していく。棒の長さを  $S$  系で観測することは  $x$  軸に平行な直線 ( $S$  系における同時刻の世界線) と、棒の両端の世界線との交点を求めてその距離を測ることに対応する。図 2 を用いると、この長さは  $\sqrt{1 - \beta^2}$  であることがわかる。

相対性理論の結果には一見矛盾するようなものがある。これらは相対性理論を正しく理解すると実はパラドクスではないことがわかるのである。有名なものとして「双子のパラドクス」と呼ばれる問題を紹介しよう。双子のうち的一方 (A としよう) がロケットに乗って宇宙旅行に出かける。地球に残った他方 (B としよう) から見るとロケットの中の時計はゆっくりと進む。A は適当な地点でロケットを反転させ地球に戻ってくる。ここでもやはりロケットの中の時計は B のものよりもゆっくりと進むので、A が地球に帰還したときには B は自分より若い A に会うことになる。しかし運動は相対的なので、A からみると B が自分から一度遠ざかり、再び戻ってくるような運動をしたと考えても良いはずである。この場合、A の時計に比べて B の時計がゆっくり進むので、A と B が再び出会った時には、B の方が A より若いはずである。こんな妙なことが許されるのだろうか？

ミンコフスキー時空を用いてこの問題を考えてみよう。ロケットの進む方向に平行に  $x$  軸を取る。図 3 の  $O$  点より出発したロケットは  $O'$  点において方向を変え  $R$  点に戻ってくる。ロケットの速さは往復とも  $v = \beta c$  としよう。地球に残った  $B$  は  $x-ct$  で表される慣性系にいる。一方

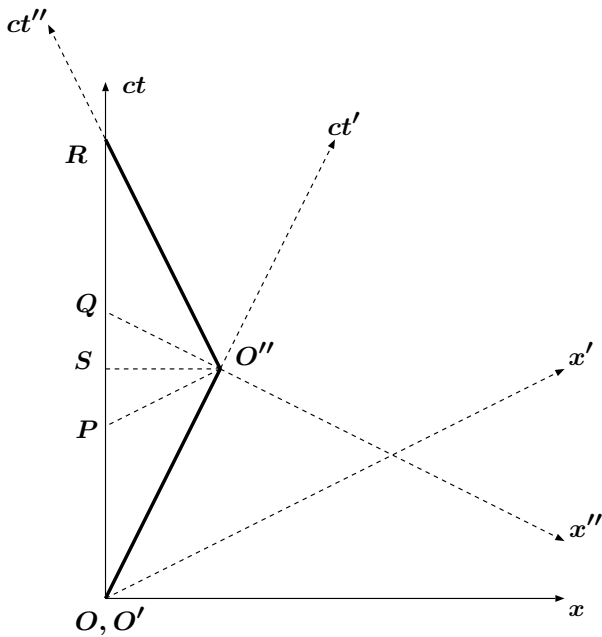


図 3: 双子のパラドクス。

ロケットに乗った A は往路では  $x'-ct'$  で表される慣性系に、復路では  $x''-ct''$  で表される慣性系にいる。

まず B から A をみる場合について考えよう。B にとってロケットが  $O''$  に到達したときと同時刻の世界点は  $S$  である。 $S$  点の B にとってはロケットが出発してから  $t_{OS}$  の時間が経過している。さて、ロケット内には時計がとりつけられており、その指し示す時刻を B が瞬時に ( $x-ct$  座標系の同一時刻線すなわち水平線に沿って) 読み取ることができるものとしよう。ロケットの中の A と時計は  $ct'$  軸にそって時間の経過を感じている。 $OO''$  の間に時計の刻む時間経過は  $t_{OO''} = \sqrt{1-\beta^2}t_{OS}$  である。復路については B は  $ct$  軸に沿って  $S \rightarrow R$  まで移動する。この経過時間は  $t_{SR} = t_{OS}$  である。一方、A は  $O''$  点において慣性系を乗り換え  $ct''$  軸に沿って  $O'' \rightarrow R$  と運動する。A にとっての時間の経過は  $t_{O''R} = t_{OO''}$  である。結局 B は終始自分の  $\sqrt{1-\beta^2}$  倍の速さで (ゆっくりと) 年を取る A を見ることになる。

次に A から B を見る場合について考えよう。A が  $O''$  点に到着したときそれと同時刻の地球上の点は  $P$  である。このとき A からみて B は  $\sqrt{1-\beta^2}$  倍の速さでゆっくりと年をとっている。しかしここで A が慣性系を乗り換えると A に同時刻の地球上の点が一気に  $Q$  まで移動する。その後は再び A は  $Q$  から  $R$  にかけて自分よりゆっくりと年をとっていき B をみる。A からみた B の経過時間の和は  $OP + PQ + QR$  でこれは A がロケット内で過ごす時間よりも長い。したがって A が地球に帰ってきたときは自分よりも年上の B に会うことになる。

以上、双子のパラドクスは実はパラドクスではなく、慣性系間の同時性を正しく取り扱っていなかったことによる誤りであることがわかる。

なお、実際の観測は上で述べたように瞬時に行うことはできない。たとえば地球に残った B が A を見る具体的な方法として、A の宇宙船内の時計を望遠鏡で眺める場合を考えてみよう。時計の像は光によって伝達されるので、光の伝播に要する時間を考慮する必要がある。図 4(a) において世界点  $W'_1$  に宇宙船を出発した時計の像は光速  $c$  で地球にたどり着き世界点  $W_1$  にお



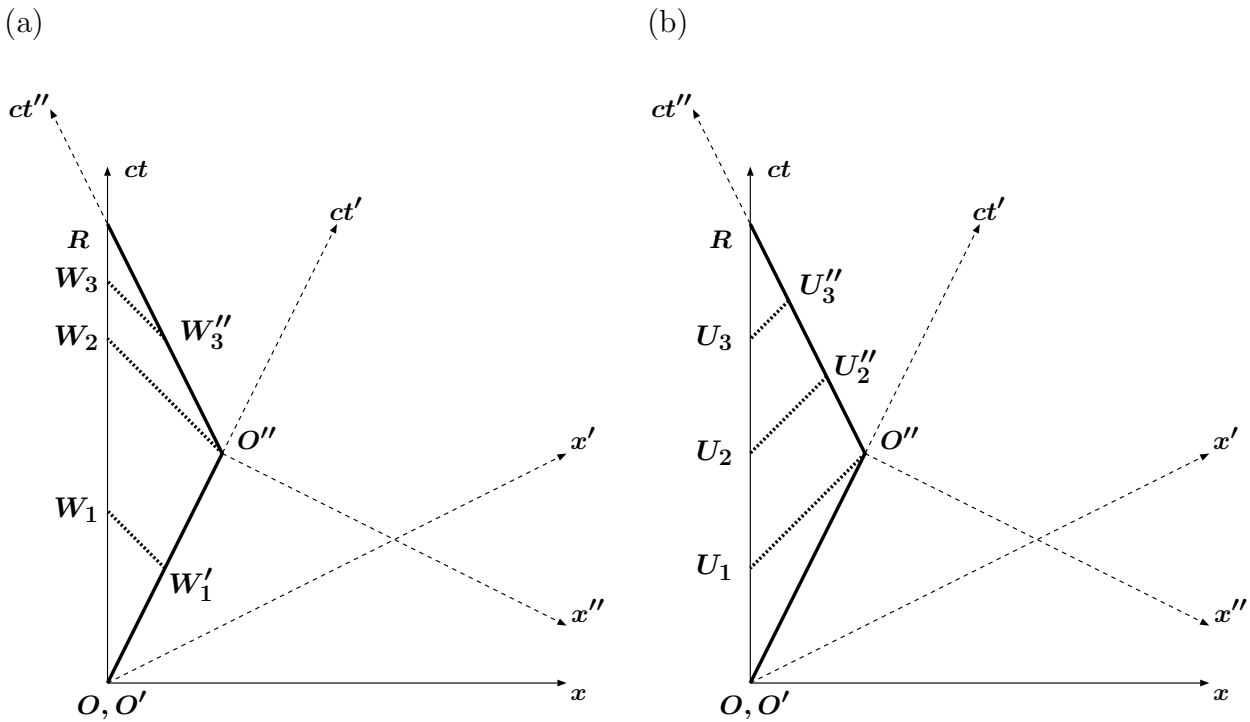


図 4: (a) 地球に残った B が宇宙船に乗った A の時計を観測する。(b) 宇宙船に乗った A が地球に残った B の時計を観測する。

いて観測される。同様にして  $O''$  は  $W_2$  で、 $W_3''$  は  $W_3$  で観測される。従って、B にとっては旅の前半の A の時計の進み具合は、後半に比べて遅い。しかし上に述べたように  $R$  点における A の経過時間は、B のその丁度  $\sqrt{1 - \beta^2}$  倍であることには変りがない。

一方宇宙船の A が B とともに地球に置かれた時計を望遠鏡で観測する場合を示したものが図 4(b) である。世界点  $U_1$  を出発した時計の像が宇宙船において観測されるのは世界点  $O''$  である。同様に  $U_2$  は  $U_2''$  で、 $U_3$  は  $U_3''$  で観測される。この場合も旅の前半での B の時計の進み具合は後半のそれに比べて遅くなる。転回点  $O''$  における B の時計の急激な進みは、実際には観測されることは無い。

## 2.6 速度の合成

慣性系  $S$  の  $x$  軸方向に速さ  $u$  で等速運動している慣性系  $S'$ 、および慣性系  $S'$  の  $x'$  軸方向 ( $S$  の  $x$  軸方向に平行) に速さ  $v$  で等速運動している慣性系  $S''$  を考える。 $S''$  は  $S$  に対しても等速運動しているが、その速度を求めたい。これは非相対論では  $u + v$  になるところのものである。

簡単のため  $t = t' = t'' = 0$  に  $S, S', S''$  の原点が一致するとしよう。 $S$  系から  $S'$  系へのローレンツ変換は

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

また  $S'$  系から  $S''$  系へのローレンツ変換は

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\t'' &= \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

である。これらから  $x', t'$  を消去すると

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{\frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - v \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\&= \frac{x - \frac{u + v}{1 + vu/c^2}t}{\sqrt{\frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + vu/c^2)^2}}} \\&= \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}\end{aligned}$$

となる。ただし

$$w = \frac{u + v}{1 + vu/c^2}$$

である。この結果は再びローレンツ変換の表式になっており、 $S''$  系が  $S$  系に対して  $w$  で運動していることを表している。 $\partial w/\partial u, \partial w/\partial v$  は  $|u| \leq c, |v| \leq c$  に対して常に 0 または正であり、 $w$  は  $u, v$  に対して単調に増加する。 $w$  が最大になるのは  $u = v = c$  の時でその値は  $c$  である。従って合成された速度  $w$  が光速度  $c$  を超えることは無い。

## 2.7 電磁場のローレンツ変換

慣性系  $S$  において、電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  中を速度  $\mathbf{u}$  で運動する電荷  $q$  を持つ荷電粒子には

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.10)$$

で表される力が作用する。これをローレンツ力という。これを  $S$  に対して粒子と同じ速度で運動している慣性系  $S'$  から眺めてみよう。粒子は  $S'$  においては静止しているので、ローレンツ力第 2 項の磁場に関する力は 0 になる。粒子に働く力は慣性系によらないとし、またアインシュタインの相対性原理によってローレンツ力の表式そのものは慣性系に依存しないものとする (実はこれは近似的にしか成り立たないことが後に示される)、電場  $\mathbf{E}$  および磁束密度  $\mathbf{B}$  が慣性系によって異なることが示唆される。

電磁場を記述する Maxwell の方程式が慣性系に依存しないという要求から、電場と磁束密度のローレンツ変換は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \mathbf{B}' &= \frac{\mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\end{aligned} \quad (2.11)$$

のようになることが示される。 $S'$ 系で静止している粒子には上の第1式で表される電場  $\mathbf{E}'$  が作用するために、粒子に働くローレンツ力は

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' \simeq q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

となり、 $u \ll c$  のとき近似的に (2.10) に等しくなる。

別の例として  $S$  系に静止した電荷  $q$  が存在し、その傍に方位磁石が置かれている場合を考えよう。 $S$  系においては電場  $\mathbf{E}$  のみが存在し、磁場は存在しない。従って電荷の存在は方位磁石には何の影響もおよぼさない。一方、これを  $S$  系に対して速度  $\mathbf{u}$  で運動している  $S'$  系から眺めるとどうなるだろうか？ 点電荷は  $S'$  系においては速度  $-\mathbf{u}$  で運動する。これは電流とみなされ、周囲に磁束密度  $\mathbf{B}'$  を生じさせるだろう。この磁場によって磁石は振れるだろうか？ この場合のポイントは磁石が  $S$  系に対して静止していることである。すなわち磁石は  $S$  系における磁束密度を見ることになり、それは0である。従って  $S'$  系の観測者にとっても磁石は振れない。なお、 $S$  系の電場  $\mathbf{E}$  は式 (2.11) により

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

と変換される。第2式は  $-\mathbf{u}$  方向に流れる電流の作る磁束密度に対応している。

参考: 実は電荷も慣性系によって変換される物理量である。電荷、電流のローレンツ変換は以下のようになっている。

$$q'(\mathbf{x}', t') = \frac{q(\mathbf{x}, t) - ui_x(\mathbf{x}, t)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$i'_x(\mathbf{x}', t') = \frac{i_x(\mathbf{x}, t) - uq(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$i'_y(\mathbf{x}', t') = i_y(\mathbf{x}, t)$$

$$i'_z(\mathbf{x}', t') = i_z(\mathbf{x}, t)$$

第1式において  $u \ll c$  のとき  $i_x$  に比例する補正項は非常に小さくなり無視しうるが、第2式における補正項  $uq$  は電荷の移動による電流を表しており無視できない。詳細は電磁気学の教科書 (例えば砂川重信「理論電磁気学」紀伊国屋書店等) を参照されたい。

## 2.8 ドップラー効果

近づいてくる救急車のサイレン音が遠ざかるときのそれよりも高く聞こえることは日常的に経験するところであろう。これをドップラー効果という。観測者から速さ  $v$  で遠ざかる音源から振動数  $f$  の音波が発せられているとしよう。音速を  $s$  とすると、観測される振動数は

$$f' = \frac{s}{s + v} f$$

となる。

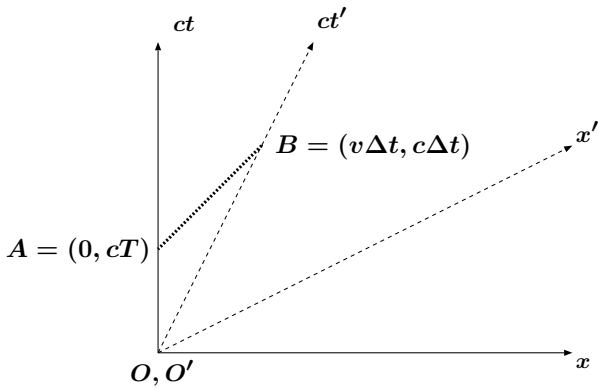


図 5: ドップラー効果。

同様の現象は光に対しても生じる。しかしながら、光の場合には光速度不変の原理のために若干事情が異なる。このことを理解するためには、ミンコフスキー空間を使用するのが便利である (図 5)。いつものように慣性系  $S$  およびこれに対して  $x$  軸の正方向に速さ  $v$  で運動している慣性系  $S'$  を考えよう。 $S$  系の原点  $O$  に置かれた光源から振動数  $\nu$  の光が放射される。原点において光の電場が 1 回振動した世界点  $A$  の  $S$  系における座標は  $(0, cT)$  である。ただし周期  $T = 1/\nu$  である。 $x = 0$  点から放射される光は  $S$  系において傾き 1 の世界線に沿って運動する。 $A$  点から出発した光が  $S'$  系の  $x' = 0$  点に達する世界点は  $B$  となる。 $B$  点の  $S$  系における座標は

$$(v\Delta t, c\Delta t) = (v\Delta t, cT + v\Delta t)$$

となる。 $\Delta t$  について解くと

$$\Delta t = \frac{c}{c-v}T$$

である。 $S'$  系の  $x' = 0$  点にいる観測者にとっては  $O-B$  の世界線に沿って電場が 1 回振動する。それに要する時間は  $B$  点の  $S'$  系における時刻で与えられる。ローレンツ変換の式を用いると

$$\begin{aligned} T' &= \frac{T + \Delta t - \beta\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}T \end{aligned}$$

となる。従って  $S'$  系で観測される振動数は

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\nu = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\nu$$

となる。

## 2.9 質量とエネルギー

この節では、質点の運動法則を調べる。我々になじみの深いニュートンの運動法則はガリレイ変換について不変な法則であり、ローレンツ不変な形式になっていない。アインシュタイン

の相対性原理によると、慣性系の区別は無いので、どの慣性系においても同じ形になるローレンツ不変な運動法則を見つける必要がある。

ある慣性系において質点の運動を観測し、その慣性系での時間  $t$  の関数として質点の位置を得た。時刻  $t \rightarrow t + dt$  の微小時間経過に伴う質点の位置の変化を  $dx, dy, dz$  と表すことにする。微小時間  $dt$  をおいて隔てられた2つの世界点間の世界距離は

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2$$

で与えられる。前節で世界線の長さがローレンツ不変量であることを見た。すなわち  $ds$  は慣性系の取り方によらない。特に時刻  $t$  における質点の運動が静止して見えるような慣性系を選べば、

$$(ds)^2 = -(cd\tau)^2$$

となる。このように選んだ時間  $d\tau$  を固有時間と呼ぶ。固有時間は質点に固定された時計が刻む時間と考えられる。固有時間に対して一般の慣性系で測定した時間  $dt$  を座標時間と呼ぶ。固有時間は質点の運動に対して一意に定まるが、座標時間は慣性系の取り方によって変化する。これらの間には

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 = -(cd\tau)^2$$

の関係があるので、

$$(cdt)^2 \geq (cd\tau)^2$$

である。

以下では座標の4元ベクトル成分を  $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  のように0~3の添字を用いて表すことにしよう。

さて、ある粒子の運動を2つの慣性系  $S, S'$  において観測することを考えよう。 $S$  系における  $t \rightarrow t + \Delta t$  の時間経過に対して、粒子の位置が  $x_j \rightarrow x_j + \Delta x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) と変化したとする。これは  $S$  系における2つの近接した世界点  $x_\mu$  と  $x_\mu + \Delta x_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) とを結ぶ運動である。 $S'$  系において観測される運動は、 $S$  における2つの世界点をローレンツ変換した世界点  $x'_\mu$  と  $x'_\mu + \Delta x'_\mu$  を結ぶ運動として表される。

もしそれぞれの慣性系において粒子の速度を

$$u_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_j}{\Delta t},$$

$$u'_j = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'_j}{\Delta t'} \quad (j = 1, 2, 3),$$

のように定義したとすると、両者間の変換規則は非常に複雑なものとなることが予測される。なぜなら、右辺の分母と分子のいずれもがローレンツ変換によって変換されるからである。これに対して、固有時間を用いて

$$v_\mu = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta x_\mu}{\Delta \tau} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

のように速度を定義すると、分母はローレンツ変換に対して不変なので、座標の変換と全く同じように速度の変換を行うことができる。例えば  $S'$  系が  $S$  に対して  $x$  軸方向に運動している

場合は、

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= \frac{v_1 - \beta v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 v'_2 &= v_2 \\
 v'_3 &= v_3 \\
 v'_0 &= \frac{v_0 - \beta v_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

となる。このような速度を4元速度という。4元速度の第0成分  $v_0 = d(ct)/d\tau$  を求めるために、ある瞬間の粒子が静止して見える慣性系と  $S$  系との間のローレンツ変換を考えよう。 $S$  系における粒子の(座標時間を用いて定義される)普通速度  $\mathbf{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$  を用いて

$$cdt = \frac{cd\tau}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}}$$

となる。従って

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \\
 v_1 &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{u_1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \\
 v_2 &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{u_2}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \\
 v_3 &= \frac{dz}{d\tau} = \frac{u_3}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

となる。異なる慣性系間で座標と同じように変換される4元ベクトルを反変ベクトルという。4元速度ベクトルは反変ベクトルである。

同様にして4元加速度を

$$\alpha_\mu = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2}$$

と定義すると、これも4次元座標や4元速度と同様にローレンツ変換によって変換されることがわかる。すなわち4元加速度も反変ベクトルである。

粒子の速度  $\mathbf{u}$  が小さいときは  $d\tau$  は  $dt$  で近似される。従って4元速度、4元加速度の  $j = 1, 2, 3$  成分は通常のニュートン力学で現れる速度、加速度ベクトルに収束する。

相対論的な運動方程式として

$$\frac{d}{d\tau} m v_\mu(\tau) = f_\mu(\tau)$$

の形を仮定しよう。右辺の  $f_\mu$  は4次元力でありその実体については後で考える。 $m$  はニュートン力学の質量に相当するパラメータである。慣性系の変換に対して  $f_\mu$  がローレンツ変換にしたがって(反変ベクトルのように)変換するならば、式(2.9)は

$$\frac{d}{d\tau} m v'_\mu(\tau) = f'_\mu(\tau)$$

となり、運動方程式の形が慣性系に依存しないという相対論の要請が満たされていることがわかる。方程式がこのような性質を持っているとき、方程式がローレンツ変換に対して共変であるという。

4次元運動量を

$$p_\mu = mv_\mu$$

と定義する。これを用いた4次元運動方程式は

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu$$

となる。運動量の空間成分  $p_j (j = 1, 2, 3)$  の座標時間  $t$  による変化を考えると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \mathbf{f} \sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}$$

である。これは、座標時間を用いて記述した(相対論的共変性を持たない)運動方程式で、ニュートンの運動方程式に類似のものになっている。粒子に働く非相対論的な力  $\mathbf{F}$  は

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2} \quad (2.14)$$

で与えられると考えられる。

次に相対論的運動方程式の第0成分

$$m \frac{dv_0}{d\tau} = f_0$$

の意味について考えてみよう。式(2.13)を用いると4元速度の各成分の間に

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_0^2 = -c^2$$

の関係があることがわかる。両辺を  $\tau$  で微分すると

$$v_1 \frac{dv_1}{d\tau} + v_2 \frac{dv_2}{d\tau} + v_3 \frac{dv_3}{d\tau} - v_0 \frac{dv_0}{d\tau} = 0$$

これに  $m$  をかけて相対論的運動方程式を用いると

$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 - v_0 f_0 = \frac{dx_1}{d\tau} f_1 + \frac{dx_2}{d\tau} f_2 + \frac{dx_3}{d\tau} f_3 - \frac{dx_0}{d\tau} f_0 = 0$$

となる。 $x_0 = ct$  等の関係を用いると上の式は

$$-\frac{cdt}{d\tau} f_0 + \left( \frac{dx_1}{dt} f_1 + \frac{dx_2}{dt} f_2 + \frac{dx_3}{dt} f_3 \right) \frac{dt}{d\tau} = 0$$

と変形される。両辺を  $dt/d\tau$  で除すると

$$f_0 = \frac{dp_0}{d\tau} = \frac{1}{c} \left( \frac{dx_1}{dt} f_1 + \frac{dx_2}{dt} f_2 + \frac{dx_3}{dt} f_3 \right)$$

が得られる。両辺に  $d\tau/dt = \sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}$  をかけて式 (2.14) を用いると

$$\frac{dcp_0}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt} F_1 + \frac{dx_2}{dt} F_2 + \frac{dx_3}{dt} F_3 \right)$$

が得られる。右辺はニュートン力学において単位座標時間あたりに質点になされる仕事をあらわしている。従って左辺は質点の持つエネルギーの時間微分と解釈される。このエネルギー  $E$  は

$$E = cp_0 = mc \frac{dx_0}{d\tau} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \quad (2.15)$$

で表される。

粒子の速度  $|\mathbf{u}|$  が光速に対して十分に小さいとき、すなわち非相対論的な極限では

$$E \simeq mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) = mc^2 + \frac{1}{2} m\mathbf{u}^2$$

となる。第2項はニュートン力学的な運動エネルギーである。第1項はエネルギー原点をずらしているだけのように考えることもできるが、そうすると4元運動量の共変ベクトルとしての性質が損なわれてしまい、ひいては式 (2.9) の共変性も失われるので好ましくない。従って  $mc^2$  は粒子の実際のエネルギーの一部を表していると考えべきである。速度  $\mathbf{u}$  が0のとき系のエネルギーが  $mc^2$  になるので、これを系の静止エネルギーと呼ぶ。これはまた物質の質量とエネルギーが相互に転換可能な量であることを示している。

式 (2.13) より粒子の4元運動量は粒子の非相対論的な速度  $\mathbf{u}$  を用いて

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \\ p_1 &= \frac{mu_1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \\ p_2 &= \frac{mu_2}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \\ p_3 &= \frac{mu_3}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。特に  $p_1, p_2, p_3$  について粒子の質量が  $m' = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}$  となったと考えて

$$p_j = m' u_j$$

とあらわすこともできる。この解釈では運動する粒子は重くなる。

有限の静止質量  $m$  を持つ粒子の速度  $u$  が光速  $c$  になると式 (2.16) や (2.15) において運動量やエネルギーが発散してしまう。従って光子のように光速で運動する粒子は質量を持ち得ない。このような粒子においては式 (2.16) より

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{E^2}{c^2}$$

が成り立つ。すなわち光子の空間的な運動量  $p$  は

$$p = \frac{E}{c}$$



で与えられる。なお、有限の質量を持つ粒子の運動量とエネルギーの関係は式 (2.16) より

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - E^2/c^2 = -m^2c^2$$

すなわち

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

で与えられる。

相対論的な効果がどのような場合に重要であるが、電子を例にとり具体的な数値で調べてみよう。電子の静止質量は  $9.1 \times 10^{-31}$  kg で、これはエネルギーに換算すると 511 keV になる。この電子を光速の 90% にまで加速したとするとエネルギーは

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{511\text{keV}}{\sqrt{1-(0.9)^2}} = 1.17\text{MeV}$$

となる。この加速に必要なエネルギーは  $6.6 \times 10^2$  keV である。もしこのエネルギーをニュートン力学の運動エネルギー  $mu^2/2$  とみなすとその速度は光速の 1.6 倍にもなり、相対論の結果とは大きく異なってしまう。これに対して 2 eV の運動エネルギーを持つ電子の速度は光速の 0.27% 程度である。相対論に特徴的な  $\sqrt{1-u^2/c^2}$  は 0.999996 の程度で、その効果はほとんど無視できる。

最後に 1.1.3 で少し触れたコンプトン効果について考察しよう。エネルギーの保存則と運動量の保存則は量子論や相対論においても成立する普遍的な法則である。相対論においては粒子の 4 元運動量ベクトルの総和が保存するという形でエネルギー保存則と運動量保存則が統一的に表される。

エネルギー  $E$  の光子が  $x$  方向に進み静止している電子に衝突する。衝突後の電子と光子の軌道は  $xy$  面内にあるとする。衝突前の光子の 4 元運動量は

$$(E/c, E/c, 0, 0)$$

電子の 4 元運動量は

$$(mc, 0, 0, 0)$$

である。ただし  $m$  は電子の静止質量である。衝突後の光子と電子の 4 元運動量を

$$(E'/c, p'_x, p'_y, 0, 0), \quad (E''/c, p''_x, p''_y, 0)$$

とする。エネルギーおよび運動量保存則により

$$\begin{aligned} E + mc^2 &= E' + E'', \\ E/c &= p'_x + p''_x, \\ 0 &= p'_y + p''_y \end{aligned}$$

である。各粒子のエネルギーと運動量の関係から

$$\begin{aligned} E'^2 &= c^2(p_x'^2 + p_y'^2), \\ E''^2 &= m^2c^4 + c^2(p_x''^2 + p_y''^2) \end{aligned}$$

である。X線の散乱方向を $\theta$ とすれば

$$\tan \theta = \frac{p'_y}{p'_x}$$

である。6つの未知数 $p'_x, p'_y, p''_x, p''_y, E', E''$ に対して6つの方程式があるので、解を求めることができる。

### 3 物性物理学への道

#### 3.1 水素分子

水素ガスを構成する水素分子は水素原子 2 個からなる。これらの原子は共有結合と呼ばれるしくみで引き付けあっている。ここでは共有結合のあらましを見よう。

2 個の水素原子を十分に離して置く。この 2 つの水素原子からなる系の最低エネルギー状態では、2 つの原子が共に基底状態 ( $1s$  状態) にある。この時エネルギーは  $-13.6 \text{ eV} \times 2 = -27.2 \text{ eV}$  である。

次に 2 個の水素原子を同一位置に置くことを想像してみよう。これは 2 個の陽子のまわりを 2 個の電子が回る状況であり、He 原子に類似したものになる。電子のエネルギーは原子番号  $Z$  の 2 乗に比例するので、最低状態の電子軌道のエネルギーは  $-13.6 \text{ eV} \times 4 = -54.4 \text{ eV}$  となり、この軌道に 2 個の電子が (逆向きスピンを持って) 入るので、電子の持つ全エネルギーは  $-108.8 \text{ eV}$  となる。実際には電子間の斥力エネルギーがあるのでエネルギーは若干大きくなり、 $-81.2 \text{ eV}$  程度になるが、それでも水素原子を離して置くよりも小さなエネルギーとなる。

自然はなるべくエネルギーの小さい状態を選ぶ。上の結果によると水素原子を離しておいても同じ場所に置いておく方がエネルギーが低い。それでは全ての水素原子は合体して原子番号 2 の原子になってしまうのだろうか？ 実は、原子核が互いに近づきすぎると強い反発力が働くので、そのようなことにはならない。系全体のエネルギーは電子のエネルギーと原子核間の斥力エネルギーの和で表される。水素原子間の距離を  $R$  とすると、 $R \rightarrow 0$  で前者は減少するのに対して、後者は  $R \sim 0$  で急激に増大する。この結果、系全体のエネルギーは  $R = R_0$  で極小となる。これが 2 つの水素原子からなる水素分子である。水素分子のエネルギーは 2 つの水素原子が離れているときと比較して  $4.5 \text{ eV}$  だけ低い。このエネルギーを結合エネルギーという。

上のように水素分子が形成されるとき、電子は 2 つの水素原子にまたがるよう存在するだろう。このように分子全体にまたがって運動する 1 個の電子の波動関数のことを分子軌道 (molecular orbital, MO) という。これに対して、原子の波動関数のことを原子軌道 (atomic orbital, AO) という。上で述べた水素分子形成の状況は、 $R_0$  だけ離して置かれた 2 つの水素原子核にまつわる MO に 2 個の電子をいれたもののエネルギーと、孤立した水素原子の AO に 1 個の電子をいれたもののエネルギーの 2 倍とを比較すると、前者の方がエネルギーが低いと言い換えられる。

分子軌道を計算するために用いられる近似法のひとつとして LCAO とよばれる方法がある。これは MO を AO の 1 次結合 (linear combination) で表す。 $a, b$  の 2 点に置かれた原子の AO を  $\phi_a(\mathbf{r}), \phi_b(\mathbf{r})$  と書くと、LCAO として

$$\begin{aligned}\phi_+(\mathbf{r}) &= C_+[\phi_a(\mathbf{r}) + \phi_b(\mathbf{r})], \\ \phi_-(\mathbf{r}) &= C_-[\phi_a(\mathbf{r}) - \phi_b(\mathbf{r})],\end{aligned}\tag{3.1}$$

の 2 種類が得られる (なぜこの 2 つなのか、他には無いのかについては、ここでは触れない)。これらはいずれも電子が 2 つの AO の間を行きつ戻りつしている状況を表している。原子間距離が十分に離れた状況では、 $|\phi_+(\mathbf{r})|^2, |\phi_-(\mathbf{r})|^2$  はともに各原子位置でピークを持つ関数形状をしており、これは予想されるとおりである。

原子間隔が近づいてきて2つのAOが空間的に重なるようになってくると、 $\phi_+$ では原子間の中央部分に電子が0でない存在確率を持つのに対して、 $\phi_-$ では原子間の中央部分の電子の存在確率は0になる。原子間中央部分は電子にとって双方の原子核のクーロン引力を受ける位置であり、エネルギー的に好ましい。従って $\phi_+$ は $\phi_-$ よりエネルギーが低くなる。水素分子の基底状態は $\phi_+$ のような関数で表される。 $\phi_+$ のことを結合軌道、 $\phi_-$ のことを反結合軌道という。水素分子の反結合軌道は、水素分子の励起状態に対応する。

## 3.2 固体

物質は温度、圧力に応じて気体、液体、固体の各相をなす。例えば固体である氷は1気圧0°Cで液体の水になり、さらに1気圧100°Cで液体になる。ヘリウムを除く物質はゆっくりと温度を下げるにより構成要素が周期的に配列した結晶状態の固体になる。ここでは様々な結晶の成り立ちについて概観する。

### 3.2.1 分子結晶

酸素や窒素、メタン等の有機物の多くは上の水素分子と同様の機構により分子を形成している。常温常圧で気体状態のこれらの物質は、温度を下げると液体、固体へと相が変化する。結晶状態においては、分子の構造はそのままで、分子と分子の間がファンデルワールス力と呼ばれる電磁的な力で結合している。このように分子構造を保ったまま結晶となる物質を分子結晶という。Arなどの希ガスは原子自身が低温でファンデルワールス力による結晶をつくるので、これも分子結晶に分類されている。分子結晶は分子間の結合が弱いため融点や凝固点が低く、常温常圧で液体または気体のものが多い。例えばArの融点は83.8 Kである。

ファンデルワールス力は、原子が原子核と電子からなるという事実に基づいて理解される。電場中に原子や分子が置かれると原子核が電場の方向に、電子(雲)がその逆の方向に力を受けて原子が変形し、電気双極子モーメントが生じる。電気双極子モーメントの存在は、その周囲に電場を生じ、その電場がさらに周囲の原子(分子)を分極させる。このような連鎖により、原子や分子は互いに近接して存在する方が全体のエネルギーが低くなる。これがファンデルワールス力の起源である。

### 3.2.2 共有結合結晶

ダイヤモンド、Si、Geなどの結晶では原子間が共有結合によって結合している。これは巨大な分子ともみなされる。このような結晶を共有結合結晶という。共有結合のエネルギーは、ファンデルワールス力のエネルギーに比べてはるかに(100倍くらい)強く、これらの物質の融点は1000°Cを超えるものが多い。例えばSiの融点は1687 Kである。

共有結合は、電子の軌道と密接に関連しており、極めて強い方向性を持つ。このため共有結合結晶は充填率の低い構造を取る。

### 3.2.3 イオン結晶

Na原子は最外殻の電子をひとつ放出することで安定なNe原子と類似の電子構造をとる傾向が強い。このようなものを正イオンという。一方Cl原子は最外殻に一つ余分の電子を取り込むことで安定なAr原子と類似の電子構造をとる傾向が強い。このようなものを負イオンという。NaClのような物質ではNaの放出した電子をClが取り込み、正に帯電したNaイオンと負に帯電したClイオンがクーロン力によって引き合って結晶を形成する。このような結晶をイオン結晶という。イオン結合の強さは共有結合とファンデルワールス力の中間程度で、例えばNaClの融点は800 Kである。

### 3.2.4 金属結晶

Fe, Auなどの金属では原子から放出された電子が丁度糊のように正イオンの間をつないでいる。電子は複数個の正イオンで共有されているとみなすこともできる。金属結合の強さは共有結合とファンデルワールス力の中間程度で、例えばNaの融点は371 Kである。

## 3.3 エネルギーバンド

水素分子の結合のところで見たように、原子と原子が近づくと、同一エネルギーまたは近接したエネルギー準位にある電子が相互作用し、新しいエネルギー状態をつくる。結晶のように多数の原子が集まると新しく生じるエネルギー準位間隔は非常に密になり、事実上連続的なエネルギーバンドを形成する。エネルギーバンドの幅は、関与する電子状態の相互作用の強さに依存しており、相互作用が弱い場合は狭いバンド幅に、相互作用の強い場合は広いバンド幅になる。これは、水素原子が離れてあるときと近づいたときの結合-反結合軌道の分裂幅の挙動と対応している。

一般に内殻の電子は隣接する原子間での相互作用が弱く狭いバンドをつくり、外殻になるほど相互作用が強くなり広いバンドをつくる。場合によっては別の原子軌道からできたバンドと重なってつながったり反発したりすることもある。バンドとバンドの間のエネルギー領域は禁止帯と呼ばれ、電子はこのエネルギーをとることができない。一方、電子が存在可能なバンドは許容帯と呼ばれる。

物質中の電子の個数は、原子核の正の電荷と釣り合うように決まった値をとる。同一の状態を2つの電子がとることができないという性質(パウリの排他律)があるために、これらの電子は許容帯のエネルギーの低いところから順につまんでいく。全電子が収容されたとき、禁止帯でへだてられた下の許容帯が完全に電子で埋まっており、上の許容帯が完全に空いている状態になる場合と、ひとつの許容帯の途中までが電子で埋まっていてその上が空いている場合とがある。前者のような状況は、極めて偶然にしか起こらないように思うかもしれないが、量子力学的には原子の個数とバンド内の準位(先に述べたように極めて密ではあるが厳密には離散的である)の個数とは密接に関連しており、実際にはごく普通に見られる。

### 3.4 物質の存在様態 —金属、半導体、絶縁体—

物質は電気伝導の度合いによって金属、絶縁体、半導体に分類されるが、これらの性質は上述のエネルギーバンドに基づいて理解される。

許容帯の途中までが電子で埋まっいて、その上が空いている状況を考えよう。この場合、電子の有無の境界直下にある電子は、極めて小さなエネルギーを受け取って、空いている準位に励起され得る。このように励起された電子は物質中を自由に移動することができる。このような物質が金属と呼ばれる。

金属に電場をかけて電流を流すとき、電場による電子の運動エネルギーの増加(電子の励起エネルギー)を見積もってみよう。長さ1 mの電線の両端に1 Vの電圧をかけて電流を流す。金属中の電子は $10 \text{ \AA} = 10^{-9} \text{ m}$ 進むと散乱されてしまうでしょう。この間に電子がクーロン力によって得る運動エネルギーは $10^{-9} \text{ eV}$ に過ぎない。もし電子のエネルギー準位の間隔が $10^{-9} \text{ eV}$ より密でなければ電子はこのエネルギーを受け取ることができず、電場をかけても電流が流れない。しかしながら、普通の物質ではバンド内のエネルギー準位間隔は $10^{-20} \text{ eV}$ 以下であるので、金属のようにバンドが途中まで満たされていれば、 $10^{-9} \text{ eV}$ の励起エネルギーを受け取ることは全く問題ない。

半導体と絶縁体はいずれも電子で満たされた許容帯(これを価電子帯という)と電子の無い許容帯(これを伝導帯という)とが禁止帯で隔てられている。半導体と絶縁体の明確な区別は存在せず禁止帯幅(エネルギーギャップと呼ぶ)が2 eV程度までのものを半導体、それ以上のものを絶縁体と呼ぶことが多い。代表的な半導体 Si, Ge GaAs の室温でのエネルギーギャップはそれぞれ 1.11 eV, 0.66 eV, 1.43 eV である。

絶対0度においては半導体や絶縁体のいずれも全く電気伝導性を示さない。これは以下のように理解される。電流を流すためには電子を励起しなければならないが、絶対零度の半導体、絶縁体ではひとつの電子を励起するために最低でもエネルギーギャップ程度のエネルギーを与える必要がある。このエネルギーは eV のオーダーであり、金属の電気伝導のところで見たとような neV 程度のエネルギーではとうてい励起できない。

温度が高くなると電子は熱エネルギーをもらって励起状態になる。熱励起ではひとつの自由度につき  $k_B T$  程度のエネルギーが平均として割り当てられる。 $T = 300 \text{ K}$  では  $k_B T \sim 30 \text{ meV}$  程度であるが、熱エネルギー分配には大きなばらつきがあり、エネルギー  $E$  を受け取る確率は  $k_B T$  のエネルギーを受け取る確率のおよそ  $\exp(-E/k_B T)$  程度となっている。例えば 300 K において 1 eV 程度の励起エネルギーを持つ確率は、30 meV 程度の励起エネルギーを持つ確率の  $\exp(-E/k_B T) \sim 3 \times 10^{-15}$  倍程度ある。この比は温度が高くなると急激に増大し、400 K では  $1 \times 10^{-11}$  程度になる。伝導帯に励起された電子は、金属中の電子と同様、極めて小さなエネルギーをもらって更に励起されることができ、電気伝導に寄与する。一方、電子の励起によって価電子帯には電子の抜けた孔ができるが、これも極めて小さなエネルギーをもらって励起されることができ、電気伝導に寄与する。これは正の電荷を持った粒子のように振る舞い、正孔と呼ばれる。伝導帯の電子や価電子帯の正孔をまとめてキャリアと呼ぶ。このように価電子帯から伝導体へキャリアが熱励起されることで電気伝導性を示す物質を真性半導体という。このような電気伝導は実際には極めて高純度の半導体結晶においてのみ見られる。

量子統計力学の結果によると半導体中の伝導電子、正孔の密度  $n, p$  には  $np$  積が温度に依存する一定値をとる。代表的な半導体 Si, Ge, GaAs の 300 K における  $np$  積の値はそれぞれ  $2.10 \times 10^{19}$

$\text{cm}^{-6}$ ,  $2.89 \times 10^{26} \text{ cm}^{-6}$ ,  $6.55 \times 10^{12} \text{ cm}^{-6}$  である。バンドギャップの小さい物質ほど  $np$  が大きいことがわかる。

絶縁体においては、バンドギャップが大きいために室温ではほとんど電子が励起されておらず、電気伝導は見られない。例えばダイヤモンドのエネルギーギャップは 5.4 eV もあり、 $\exp(-5.4[\text{eV}]/30[\text{meV}]) \sim 10^{-79}$  となり、事実上キャリアは全く励起されない。(通常の物質中の電子の数密度は  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$  程度である。)

### 3.5 ドーピングと p 型・n 型半導体

半導体が種々のデバイスに応用され、今日のエレクトロニクス社会の礎となっていることはよく知られているところである。半導体のこのような応用に最も密接に関連する性質は、不純物伝導と呼ばれる性質である。真性半導体に微量の不純物を添加することをドーピングと呼ぶ。半導体の電気伝導の性質はドーピングによって劇的に変化する。

Si の結晶を考えよう。Si 原子は最外殻に 4 つの電子を持つ。これらは  $sp^3$  混成軌道をつくって互いに共有結合し Si 結晶を形成している。各 Si 原子はそれぞれ周囲の 4 つの Si 原子と結合している。ここでひとつの Si 原子を最外殻に 5 つの電子を持つ As 原子と置き換えると、As 原子の 5 つの最外殻電子のうち 4 つは Si と同様に共有結合を形成するが、残りの 1 つの電子が結合にあずからない自由なキャリアとして結晶中をさまよい出す。この電子は電場をかけることで容易に移動し、電気伝導に寄与する。As の添加量を制御することで、このような過剰な電子の濃度を制御することができ、ひいては電気伝導度を制御できる。As 原子のように過剰電子を放出する役割を持つ不純物をドナーという。またドナーから供給される過剰電子が電流を担う半導体を n 型半導体という。As だけでなく P や Sb も Si や Ge に対するドナーと成りうる。エネルギー的にはドナー原子の余剰電子は伝導帯下端からわずかに下がったところ (Si/P 45 meV, Si/As 49 meV) に準位 (ドナー準位) を持つ。室温程度の熱励起によりドナー準位の電子は容易に伝導帯に励起され、自由なキャリアとなるのである。

次に Si 結晶に B, In などの最外殻に 3 個の電子しか持たない原子を添加することを考えよう。この場合価電子帯に電子が不足し、正孔が生じる。この正孔は n 型半導体の余剰電子と同様、電気伝導に寄与する。不純物の添加量で正孔濃度を制御することも n 型半導体と同様である。このような不純物をアクセプターと呼ぶ。またこのような半導体を p 型半導体と呼ぶ。エネルギー的にはアクセプター原子の不足電子の準位は価電子帯上端よりわずかに高いところにある (Si/B 45 meV)。室温程度の熱励起により価電子帯の電子がアクセプター準位に励起され、価電子帯に残された正孔が電気伝導性を示すのである。

### 3.6 接触電位差

物質中の電子は、水槽に入れられた水に例えることができる。この水槽は深さ方向にいくつかの区切り板が備えられており、水の入ることができない領域が設定されている。また水の入ることのできる領域は互いに連結されている。この水槽に一定量の水を入れると、水の入ることのできる領域の途中に水面ができる場合と、水の入ることのできる領域の上端いっぱいまで水で満たされる場合がある。前者が金属に、後者が半導体・絶縁体に対応する。

金属の場合の電子の「水面」に相当するエネルギーをフェルミエネルギー  $E_F$  という。半導体・絶縁体の場合にはフェルミエネルギーは価電子帯と伝導帯を隔てる禁止帯の途中にある。その正確な位置は統計力学で与えられる。

さて、2種類の異なる金属を接触させることを考えよう。物質が異なれば「水槽」の形(バンド構造)は異なり、また「水面」の位置( $E_F$ )も異なる。これらを接触させると、電子は  $E_F$  の高い方の物質から  $E_F$  の低い方の物質に流れ込む。これは丁度、2つの水槽を仕切り板を挟んで並べて置き、その後仕切り板を抜いたようなものである。水と異なる点は、電子が電荷を持っていることである。そのため、電子が抜けた側の物質は正に帯電し、電子が流入した側の物質は負に帯電する。更に金属内部には静電場が存在し得ない(もし存在すればその電場によって電荷が力を受けて運動し、内部の電場を打ち消すように配置する)ことを考えると、移動した電荷は接触面のごく近傍にのみ存在する。この電荷のために界面には強い電場が生じる。この電場は2つの金属の間の静電ポテンシャルの差(電位差)を生み出す。ただし2つの金属の  $E_F$  は一致しているので、この電位差が外部に定常的な電流を流すわけではない。電流は金属が接触した瞬間( $E_F$  が一致するまでの間)だけ流れる。

### 3.7 半導体デバイスの動作原理

現代社会を支えるエレクトロニクスは半導体デバイスの発明・発展によって飛躍的な進歩を遂げた。ここでは各種の基本的な半導体デバイスの動作原理を見てみよう。

#### 3.7.1 pn 接合

p型半導体とn型半導体を接合したものをpn接合ダイオードという。これは電流を一方向にのみ流す性質があり、交流を直流に変換する整流器等に用いられる。また光を発生する発光ダイオードと呼ばれるデバイスもある。太陽電池もpn接合を用いて実現できる。

p型半導体の  $E_F$  は真性半導体のそれに比べて価電子帯上端寄りにある。一方、n型半導体の  $E_F$  は真性半導体のそれに比べて伝導帯下端寄りにある。これらを接合させるとn型半導体側から伝導帯の電子がp型半導体側に、p型半導体側から価電子帯の正孔がn型半導体側に流れ込む。これらの電子と正孔は結合して消滅し、接合部分近傍に空乏層とよばれるキャリアの存在しない領域を作る。空乏層ではキャリアが消滅しているためp型領域では負に帯電しn型領域では正に帯電し、電気二重層と呼ばれる極めて近接した正負の平板状の電荷分布を生じている。電気二重層内には、その電荷分布のために「つくりつけの電場」と呼ばれる強い電場が生じる。これによりp型領域のエネルギーはn型領域のエネルギーよりも高くなり、両者の  $E_F$  が一致させられる。(静電ポテンシャルとしてはp型領域の方がn型領域よりも低くなる。)

以下、伝導帯の電子に着目してpn接合ダイオードの動作を説明しよう。上の状態ではn型領域からp型領域にむけて拡散しようとする電子の流れは、空乏層によってつくられたポテンシャル障壁によって妨げられ、p型領域からn型領域にむけて拡散しようとする電子の流れと釣り合っている。(p型領域にはもともと伝導帯に電子はほとんど存在しないのでp→nの電子の流れは小さい。

ここでp型領域が正、n型領域が負になるようにpn接合に電圧をかけると、空乏層のポテンシャル障壁高さが低くなりn→pへの電子の流れが促進される。外部からみるとp→nの向きの



電流が流れたことになる。このように電圧をかけることを「順バイアスをつける」という。ダイオードに順バイアスをかけると電流が流れる。

逆に p 型領域が負、n 型領域が正になるように pn 接合に電圧をかけると、空乏層のポテンシャル障壁高さが高くなり n→p への電子の流れが阻害される。当初釣り合いを保っていた p→n の電流が変化しなければ、差引で p→n の向きの電流が流れることになるが、これは順バイアスの電流に比べるとずっと小さい。このように電圧をかけることを「逆バイアスをつける」という。ダイオードに逆バイアスかけた場合はほとんど電流が流れない。

同様の議論は価電子帯の正孔についてもあてはまり、やはり順バイアスで電流が流れ、逆バイアスで電流が流れない。このようにダイオードには電流を一方向だけに流す性質がある。これを整流作用という。

ダイオードに順バイアスを加えて電流を流すとき、空乏層では n 型領域から流れ込む電子と p 型領域から流れ込む正孔が共存することになる。伝導体の電子は正孔に落ち込むことでエネルギーを利する。このような過程は再結合とよばれ、余分のエネルギーは熱や光となって放出される。特に再結合によって光が放出されやすいように作ったダイオードが発光ダイオードである。発光ダイオードの発する光の波長(エネルギー)は、用いられる材料のバンドギャップと深い関連がある。一般に波長の短い(エネルギーの高い)光を出すことは難しく、青色発光ダイオードが実用化されたのはここ 10 年ほどのことである。

空乏層に光を照射すると再結合と逆の過程が起こり、電子が価電子帯から伝導体に励起される。このようにして生成された電子と正孔(光励起キャリアという)は、つくりつけの電場によって電子は n 型半導体側へ、正孔は p 型半導体側へと分離され、p 型側を正に、n 型側を負に帯電させる。外部に回路をつなぐと電流をとりだすことができる。これが太陽電池の原理である。

### 3.7.2 接合型トランジスタ

接合型トランジスタは増幅、発振などの基本的電気回路において中心的な役割を担う。1948 年に John Bardeen, Walter Brattain によって点接触型トランジスタの開発が公表された。翌年には William Shockley による接合型トランジスタに関する論文が発表された。

接合型トランジスタは p 型半導体と n 型半導体を pnp または npn の順で接合した構造を持つ。中間の層は他に比べてずっと薄く(一般にミクロンオーダー厚)、ベースとよばれる。両端の部分はエミッタ、コレクタと呼ばれる。

...

### 3.7.3 電解効果トランジスタ

接合型  
MOS 型  
HEMT

バンド 電子の波長とエネルギー 分散関係  
接合型トランジスタ  
電解効果トランジスタ  
スピンと磁性  
超伝導